

Федеральное агентство по образованию
Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет им. Н.П. Огарева

А.Е. Дураев, В.В. Ерастов, А.И. Емельянов

Контрольные задания по сопротивлению материалов и примеры их решения

Учебное пособие

Саранск
2011

УДК 539.3/8

Р е ц е н з е н т ы: доцент кафедры строительных материалов и технологий Мордовского государственного университета С. В. Казначеев; главный специалист ГОСУКС Республики Мордовия С. П. Пронькин.

Дураев А.Е., Ерастов В.В., Емельянов А.И.

Контрольные задания по сопротивлению материалов и примеры их решения: Учеб. пособие/ А.Е. Дураев, В.В. Ерастов, А.И. Емельянов.– Саранск, 2011.– 93 с.

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 270100 «Строительство» по профилю №1 «Промышленное и гражданское строительство». Может быть полезным и для студентов заочной формы обучения других технических специальностей.

УДК 539.3/8

А. Е. Дураев, В.В. Ерастов,
А. И. Емельянов, 2011

Общие методические указания и порядок выполнения контрольных работ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций инженерных сооружений и машин. Неправильный расчет на прочность элемента конструкции или детали машины может привести к разрушению конструкции и в целом всего сооружения. При проведении расчетов на прочность необходимо стремиться к удовлетворению жесткости и устойчивости. При расчетах следует сочетать надежность работы конструкции с ее дешевизной.

Теоретические занятия по сопротивлению материалов сопровождаются решением задач. Только при таком сочетании можно добиться хороших результатов в учебе. Наибольший эффект в освоении материала достигается, когда студент решает самостоятельно индивидуальные задания. Для этого в учебных программах предусмотрены контрольные работы.

Каждый студент-заочник выполняет то количество контрольных работ, которое предусмотрено учебным рабочим планом. Задачи, входящие в состав контрольных работ, указаны в табл. 1.

Таблица 1.

Номера задач, входящих в контрольные работы

Номер контрольной работы	Число контрольных работ согласно рабочему учебному плану			
	одна	две	три	четыре
1	4, 5, 8, 11	3, 4, 5	1, 3, 4	1, 2, 3, 4
2	–	8, 9, 11	5, 6	5, 6, 7
3	–	–	8, 9, 11	8, 9, 10
4	–	–	–	11, 12

Порядок выполнения.

1. Студент обязан взять из последующих таблиц, прилагаемых к условию задачи, данные в соответствии со своим личным номером (шифром) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например

Шифр – 3 8 0 6 2 7;
буквы – а б в г д е.

В случае личного номера, состоящего из семи цифр, вторая цифра шифра не учитывается.

В качестве шифра возможно использование номера зачетной книжки. Предположим, что номер книжки 12/874. В этом случае, предлагаем последние три цифры записать дважды, и тогда будем иметь

Шифр – 8 7 4 8 7 4;
буквы – а б в г д е.

Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять одно число, стоящее в той горизонталь-

ной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы табл. 4 обозначены буквами: е, г, д. В этом случае, при указанном выше личном номере (шифре) 874874, следует взять из столбца е строку номер 4 (четвертый тип сечения), из столбца г – строку номер 8 (швеллер 30) и из столбца д – строку номер 7 (уголок 100x100x10).

2. В заголовке контрольной работы (на титульном листе) должны быть четко написаны: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента (полностью), название университета, факультета и специальности, личный шифр, дата отсылки работы, точный почтовый адрес. Следует указать источник, из которого взяты контрольные работы.

3. Контрольные работы следует выполнить в ученической тетради, ручкой (не красной пастой), четким почерком, с полями 5 см для замечаний рецензента.

4. В тетради необходимо написать полностью условие задачи с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать в числах все величины, необходимые для расчета.

5. Решение должно сопровождаться краткими, без сокращений слов, пояснениями и чертежами.

6. Необходимо указать единицы всех величин (в системе СИ).

В последние годы обеспечение студентов-заочников методической литературой, в основном, возлагается на ВУЗ, в котором они обучаются. Учитывая это обстоятельство, авторами подготовлено настоящее учебное пособие, в основу которого положены задания составленные Б. Н. Кутуковым и М. М. Кац [1].

Контрольные задания подготовил А. И. Емельянов, примеры их выполнения разработали А. Е. Дураев (задачи № 1 – 6) и В. В. Ерастов (задачи № 7 – 12).

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Задача 1. Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис. 1). Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ; 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; 3) найти предельную грузоподъемность системы $Q_{\text{т}}^{\text{к}}$, и допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, если предел текучести $\sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}$ и запас прочности $k = 1,5$; 4) сравнить величины $Q_{\text{доп}}$ полученные при расчете по допускаемым напряжениям (см. п. 2) и допускаемым нагрузкам (см. п. 3). Данные взять из табл. 2.

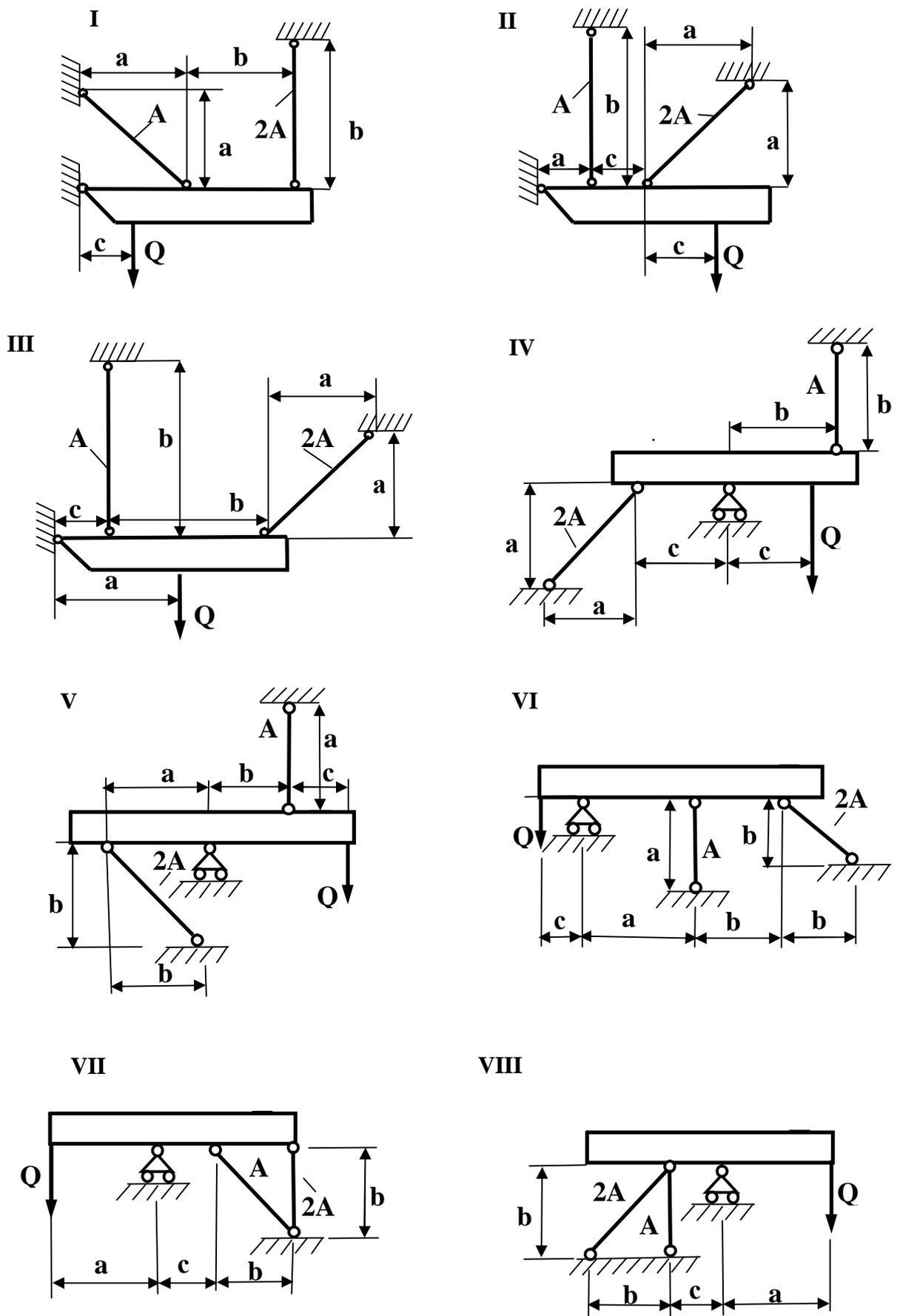
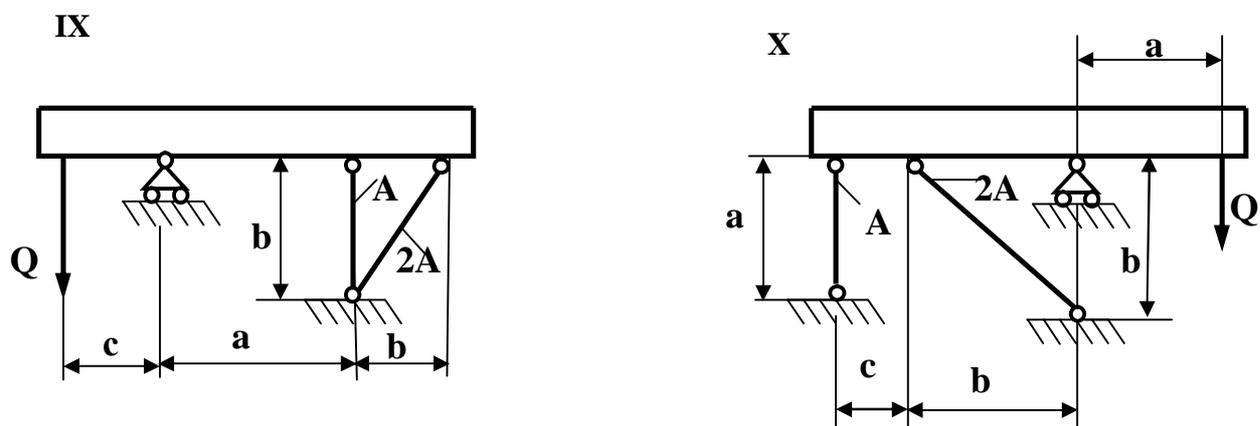


Рис. 1



Окончание рис. 1

Таблица 2

№ строки	Схема по рис. 1,2	A, см ²	a	b	c	H, кН	10 ⁵ ·β
			м				
1	I	11	2,1	2,1	1,1	110	5
2	II	12	2,2	2,2	1,2	120	4
3	III	13	2,3	2,3	1,3	130	3
4	IV	14	2,4	2,4	1,4	140	2
5	V	15	2,5	2,5	1,5	150	1
6	VI	16	2,6	2,6	1,6	110	5
7	VII	17	2,7	2,7	1,7	120	4
8	VIII	18	2,8	2,8	1,8	130	3
9	IX	19	2,9	2,9	1,9	140	2
0	X	20	3,0	3,0	2,0	150	1
	е	в	г	д	е	д	е

У к а з а н и я . Для определения двух неизвестных усилий в стержнях следует составить одно уравнение статики и одно уравнение деформаций.

Для ответа на третий вопрос задачи следует иметь в виду, что в одном из стержней напряжение больше, чем в другом; условно назовем этот стержень первым. При увеличении нагрузки напряжение в первом стержне достигнет предела текучести раньше, чем во втором. Когда это произойдет, напряжение в первом стержне не будет некоторое время расти даже при увеличении нагрузки, система станет как бы статически определимой, нагруженной силой Q (пока еще неизвестной) и усилием в первом стержне:

$$N_1 = \sigma_T A_1 \quad (1)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки напряжение и во втором стержне достигнет предела текучести:

$$N_2 = \sigma_T A_2 \quad (2)$$

Написав уравнение статики и подставив в него значения усилий (1) и (2), найдем из этого уравнения предельную грузоподъемность Q_T^K

Задача 2. Жесткий брус прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения A , опирающимся на неподвижное основание. К брусу прикреплен средний ступенчатый стальной стержень с зазором $\Delta = \beta c$ (рис. 2). Требуется (без учета собственного веса): 1) установить, при какой силе зазор закроется; 2) найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении сил H и построить эпюру продольных сил для среднего стержня; 3) найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданном значении сил H ; 4) установить, на сколько градусов надо охладить средний стержень, чтобы реакция основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении сил H обратилась в нуль. Данные взять из табл. 2.

Указания. При решении всех пунктов задачи следует учитывать, что ввиду симметрии системы усилия в крайних стержнях равны между собой.

Для ответа на первый вопрос надо приравнять перемещение нижнего сечения среднего стержня от сил H зазору Δ . Это перемещение равно сумме деформаций участков среднего стержня от продольных сил, возникающих от сил H , и деформации любого из крайних стержней (для тех схем, в которых силы H взаимно уравновешены, усилия и деформации для крайних стержней равны нулю).

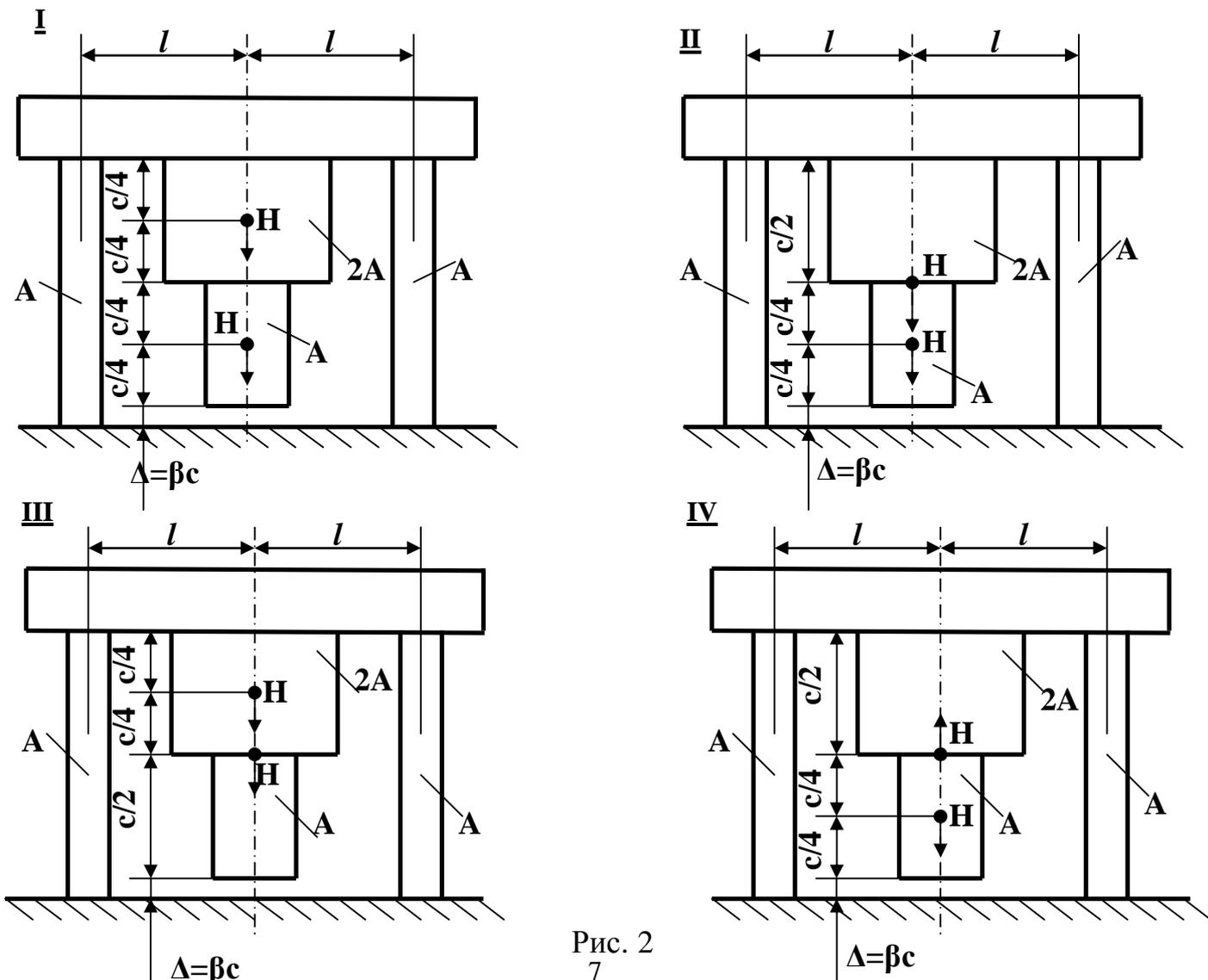
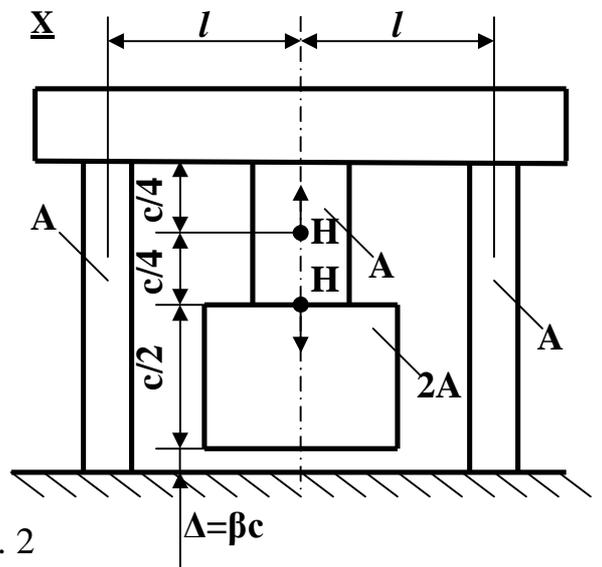
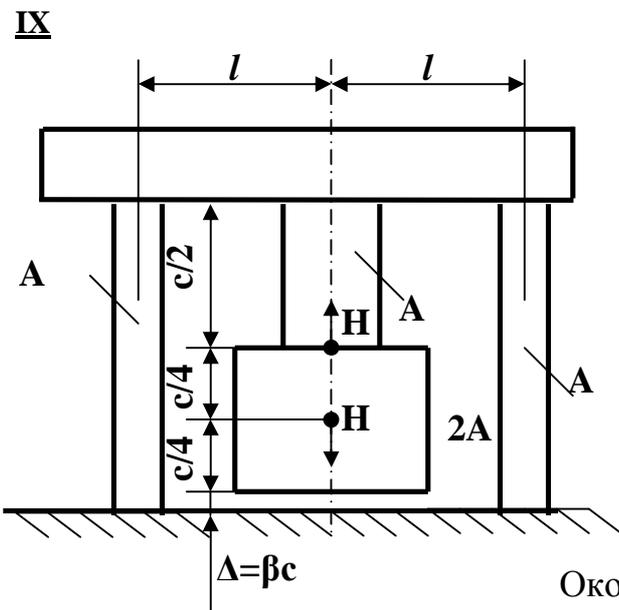
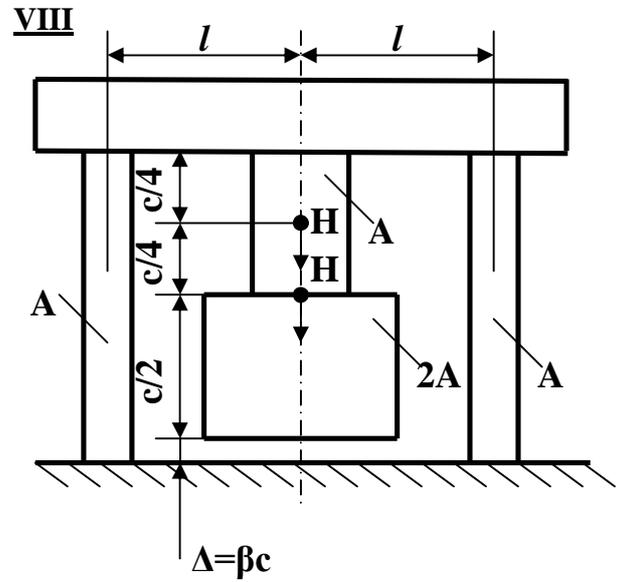
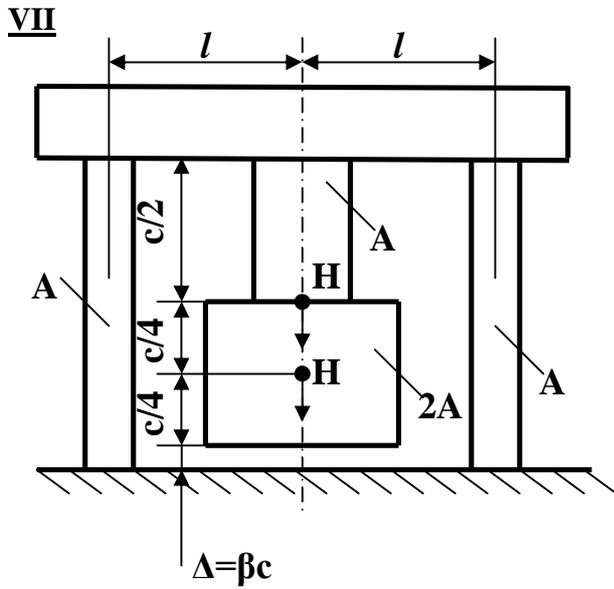
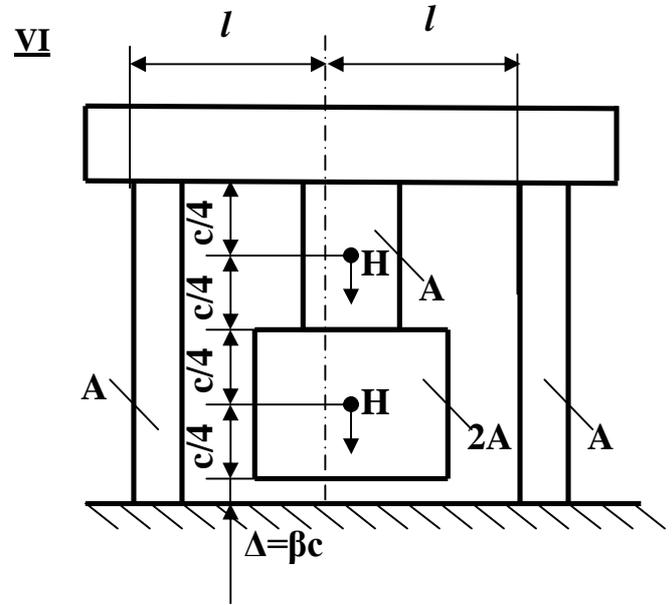
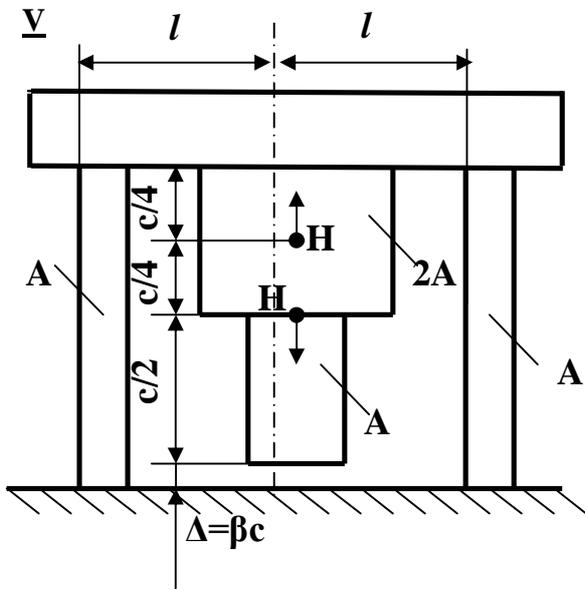


Рис. 2
7



Окончание рис. 2

Для ответа на второй вопрос надо алгебраическую сумму перемещений нижнего сечения среднего стержня от сил H и от реакции основания на средний стержень R приравнять зазору Δ . При вычислении этих перемещений надо также учитывать деформации участков среднего стержня и деформацию любого из крайних стержней. Для ответа на третий вопрос надо рассмотреть условия равновесия верхнего бруса, на который передаются силы H и R от среднего стержня и два усилия крайних стержней. Для ответа на четвертый вопрос надо приравнять перемещение нижнего сечения среднего стержня от сил H (и от деформации любого из крайних стержней, если силы H не уравновешены) сумме зазора и температурного укорочения среднего стержня:

$$\Delta(H) = \Delta + \Delta_{\tau} = \beta c + c \alpha t.$$

Задача 3. К стальному валу приложены три известных момента: M_1, M_2, M_3 (рис. 3). Требуется:

- 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
- 2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины, соответственно равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины). Данные взять из табл. 3.

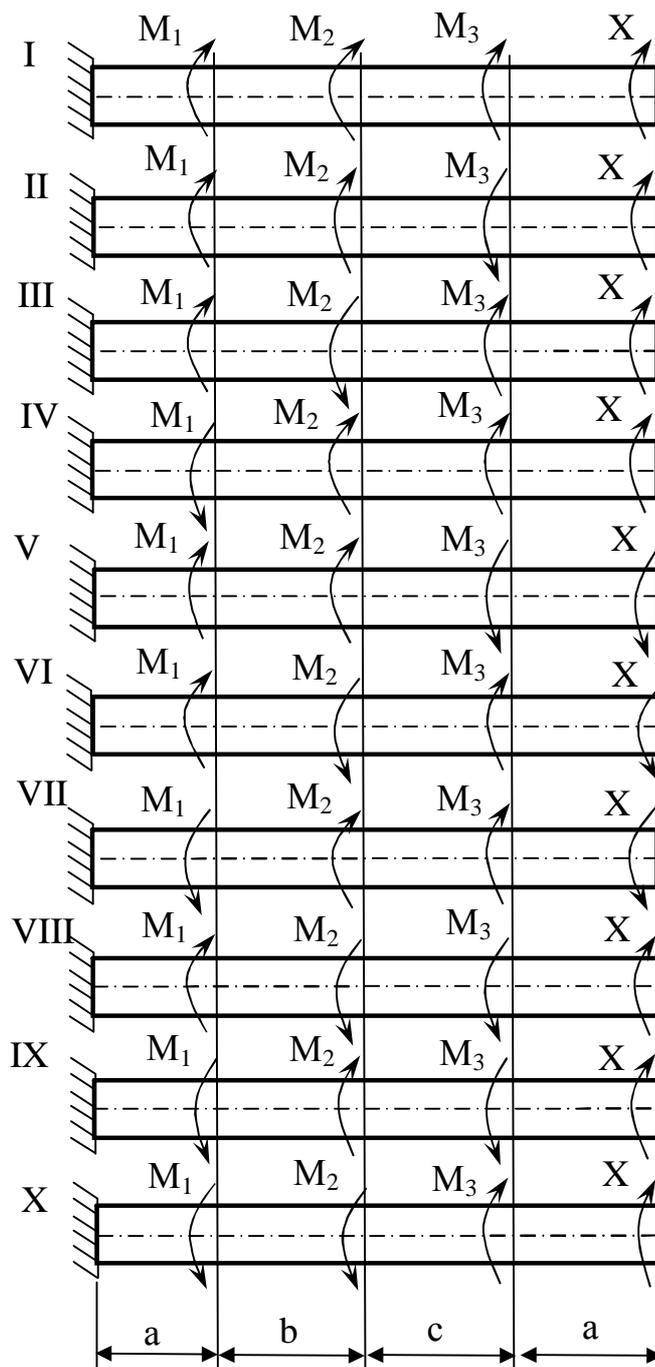


Рис. 3

Таблица 3

№ строки	Схема по рис.3	Расстояния, м			Моменты, кН·м			[τ], МПа
		a	b	c	M ₁	M ₂	M ₃	
1	I	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	80
	е	г	д	е	г	д	е	в

Задача 4. Для заданного в табл. 4 поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра (рис. 4), требуется: 1) определить положение центра тяжести; 2) найти осевые (экваториальные) и центробежные моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (z_c и y_c); 3) определить направление главных центральных осей (U и V); 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей; 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

При расчете все необходимые данные следует брать из таблиц сортамента и ни в коем случае не заменять части профилей прямоугольниками.

Таблица 4

№ строки	Схема по рис.4	Швеллер	Равнобокий уголок	Двутавр
1	I	14	80x80x8	12
2	II	16	80x80x6	14
3	III	18	90x90x8	16
4	IV	20	90x90x7	18
5	V	22	90x90x6	27
6	VI	24	100x100x8	20
7	VII	27	100x100x10	30
8	VIII	30	100x100x12	22
9	IX	33	125x125x10	36
0	X	36	125x125x12	24
	е	г	д	е

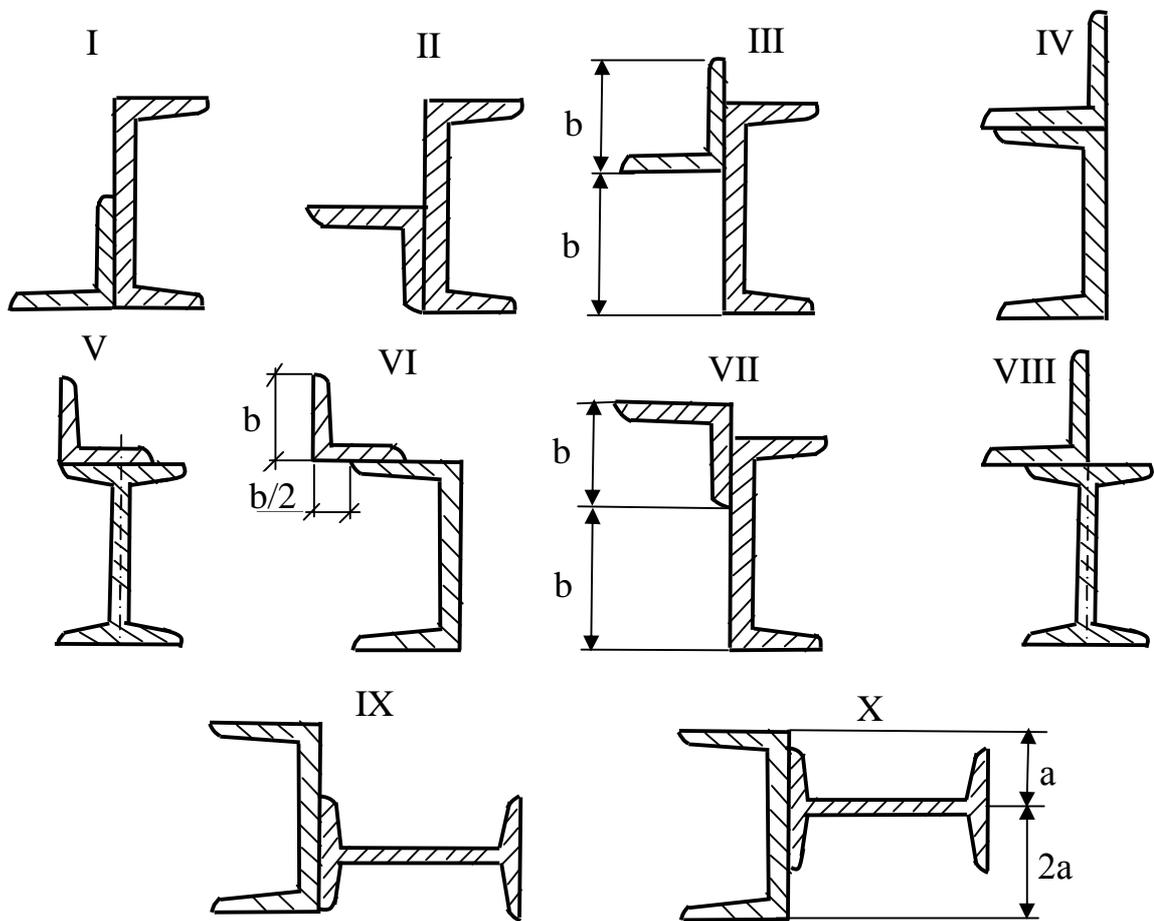


Рис. 4

Задача 5. Для заданных двух схем балок (рис. 5) требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти M_{\max} и подобрать: а) для схемы **a** деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8$ МПа; б) для схемы **б** — стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160$ МПа. Данные взять из табл. 5.

Таблица 5

№ строки	Схема по рис.5	L_1	L_2	Расстояние в долях пролета			M , кН·м	Сосредоточенная сила F , кН	q , кН/м
		м		$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$			
1	I	1,1	6	1	9	1	10	10	10
2	II	1,2	7	2	8	2	20	20	20
3	III	1,3	3	3	7	3	3	3	3
4	IV	1,4	4	4	6	4	4	4	4
5	V	1,5	5	5	5	5	5	5	5
6	VI	1,6	6	6	6	1	6	6	6
7	VII	1,7	7	7	7	2	7	7	7
8	VIII	1,8	8	8	8	3	8	8	8
9	IX	1,9	9	9	9	4	9	9	9
0	X	2,0	10	10	10	5	10	10	10
	е	д	е	г	д	е	г	д	е

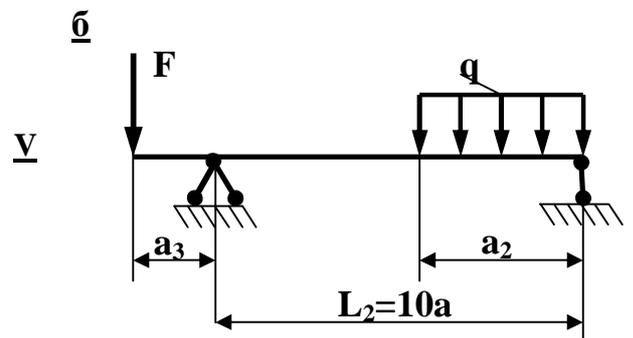
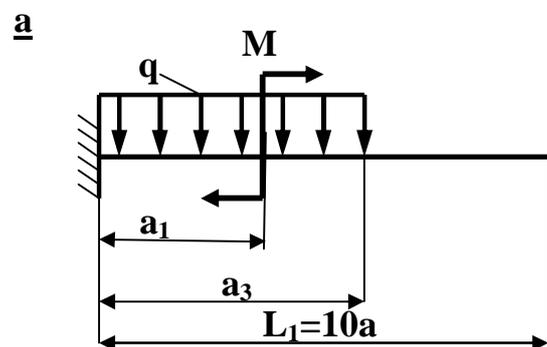
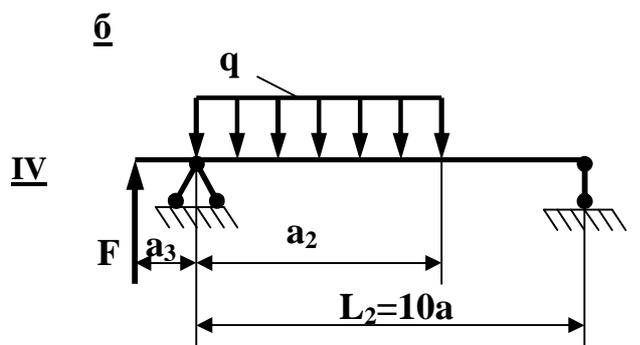
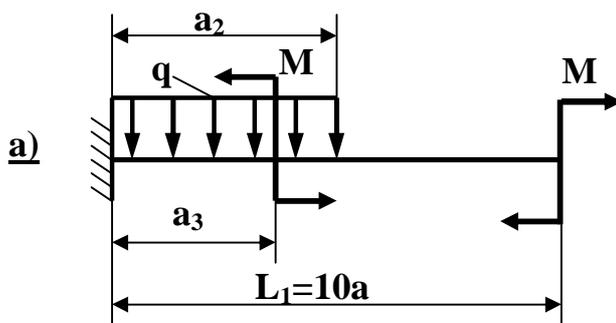
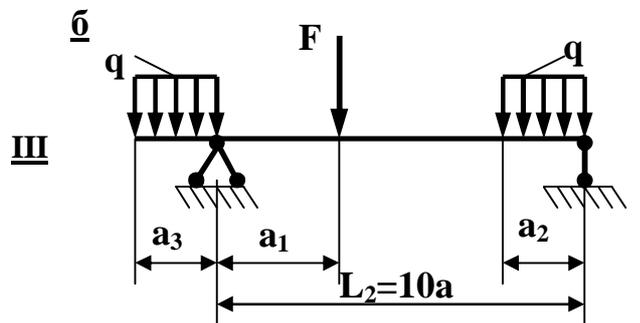
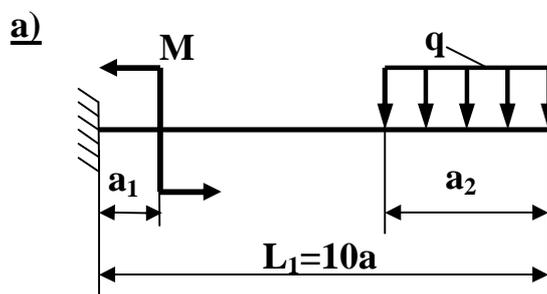
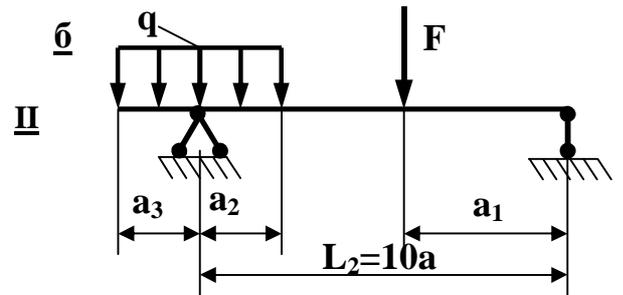
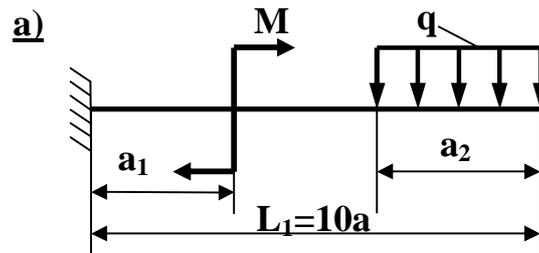
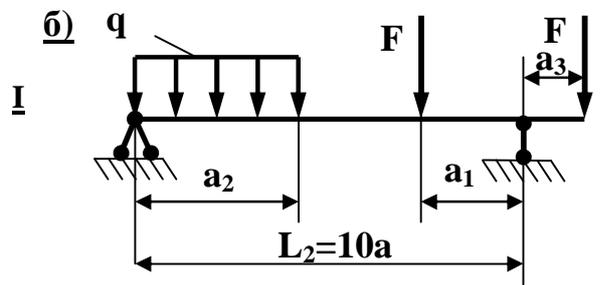
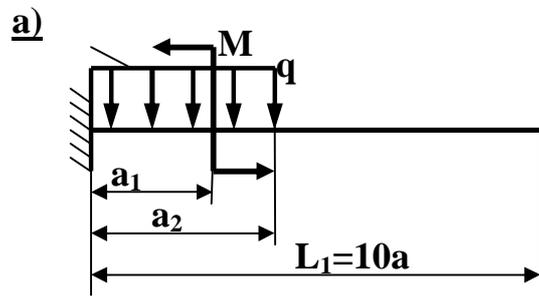
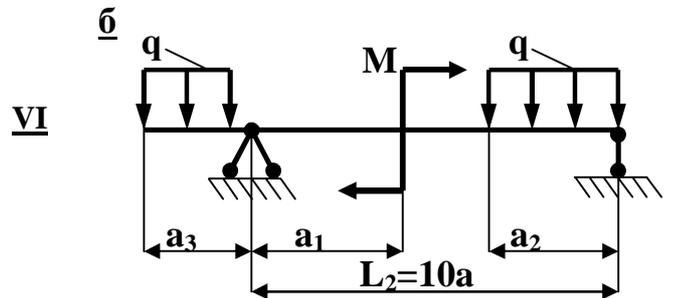
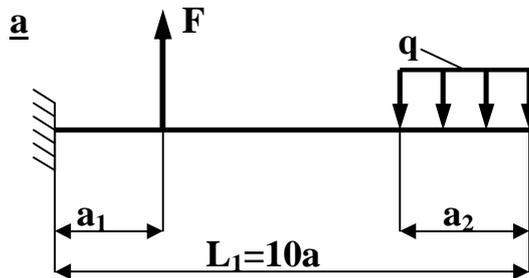
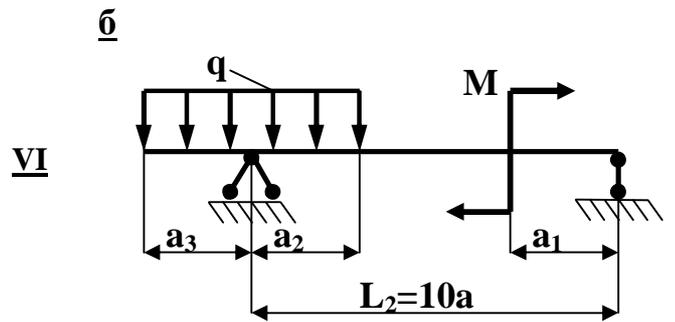
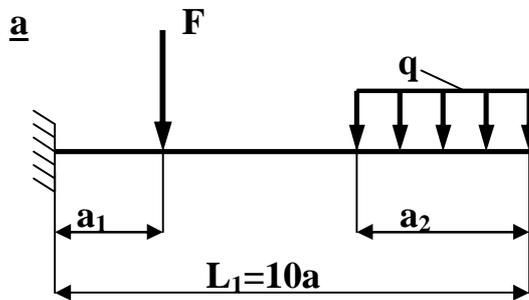
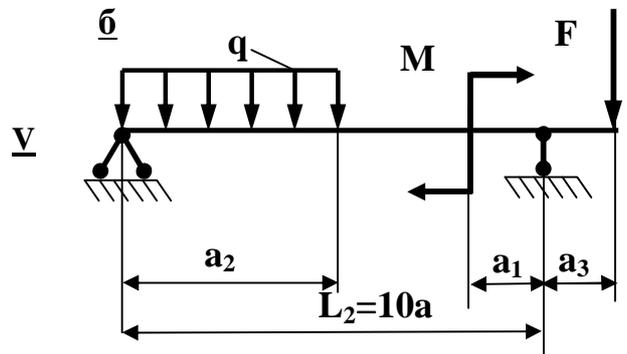
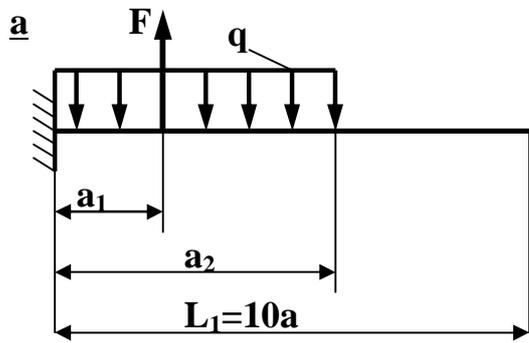
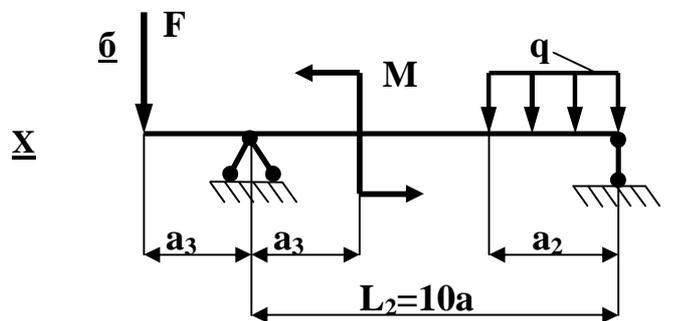
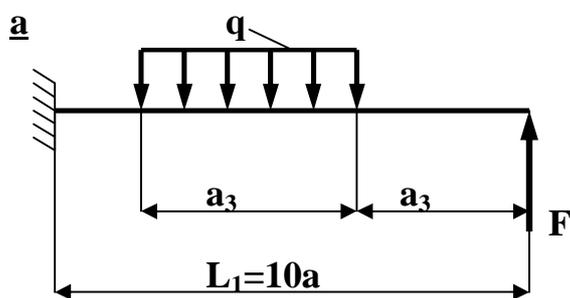
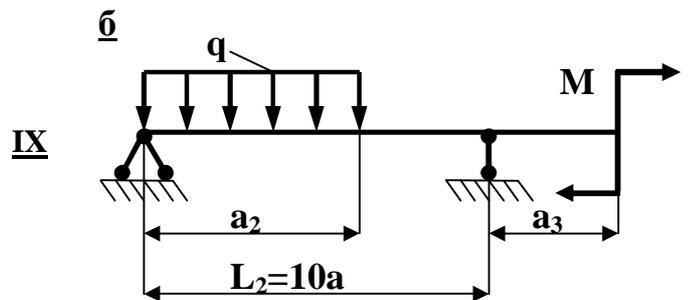
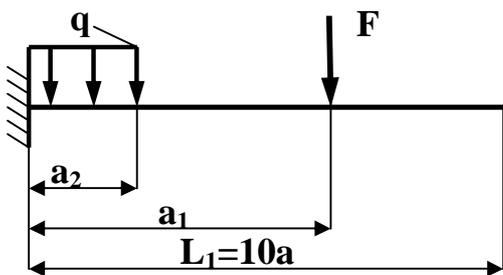


Рис. 5
12



a)



Окончание рис. 5

Задача 6. Для балки, изображенной на рис. 6, требуется: 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2); 2) построить эпюры Q и M ; 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две — на консоли. Данные взять из табл. 6.

Таблица 6

№ строки	Схема по рис.6 и 7	α	β	κ	№ строки	Схема по рис. 6 и 7	α	β	κ
1	I	0,1	0,1	1,5	6	VI	0,6	0,6	6
2	II	0,2	0,2	2	7	VII	0,7	0,7	7
3	III	0,3	0,3	3	8	VIII	0,8	0,8	8
4	IV	0,4	0,4	4	9	IX	0,9	0,9	9
5	V	0,5	0,5	5	0	X	1,0	1,0	10
	е	г	д	е		е	г	д	е

Указания. Для ответа на первый вопрос нужно выбрать основную систему в виде свободно лежащей на двух опорах балки и составить уравнение деформаций, выражающее мысль, что суммарный угол поворота на левой опоре от заданной нагрузки и от опорного момента равен нулю.

Можно также решить задачу иначе, составив два уравнения:

1) уравнение статики в виде суммы моментов всех сил относительно правой опоры;

2) уравнение метода начальных параметров, выражающее мысль, что прогиб на правой опоре равен нулю. Из этих двух уравнений можно найти изгибающий момент и реакцию на левой опоре. Для ответа на третий вопрос целесообразнее всего использовать метод начальных параметров, так как два начальных параметра (v_0 и v_0') известны, а два других (M_0 и Q_0) будут найдены в процессе выполнения первых двух пунктов контрольной работы.

При построении эпюры прогибов надо учесть, что упругая линия балки обращена выпуклостью вниз там, где изгибающий момент положительный, и выпуклостью вверх там, где он отрицательный. Нулевым точкам эпюры M соответствуют точки перегиба упругой линии.

Задача 7. Определить прогиб свободного конца балки переменного сечения (рис. 7). Данные взять из табл. 6.

Указания. Задачу можно решить графоаналитическим методом, построив эпюру M/EI и приняв ее за фиктивную нагрузку. Левый конец фиктивной балки должен быть свободен, а правый — защемлен. Для упрощения решения желательно воспользоваться правилом Верещагина.

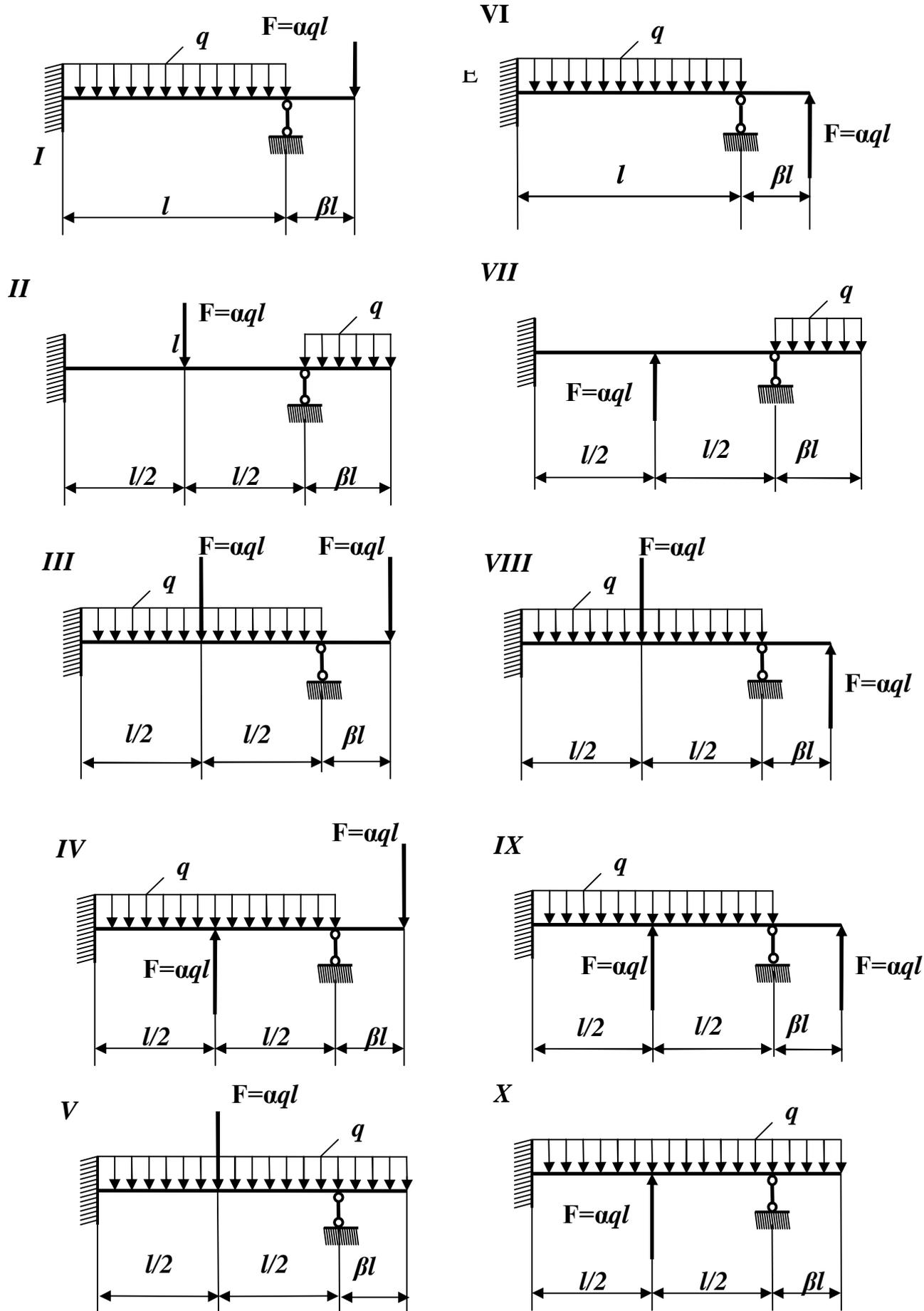


Рис. 6

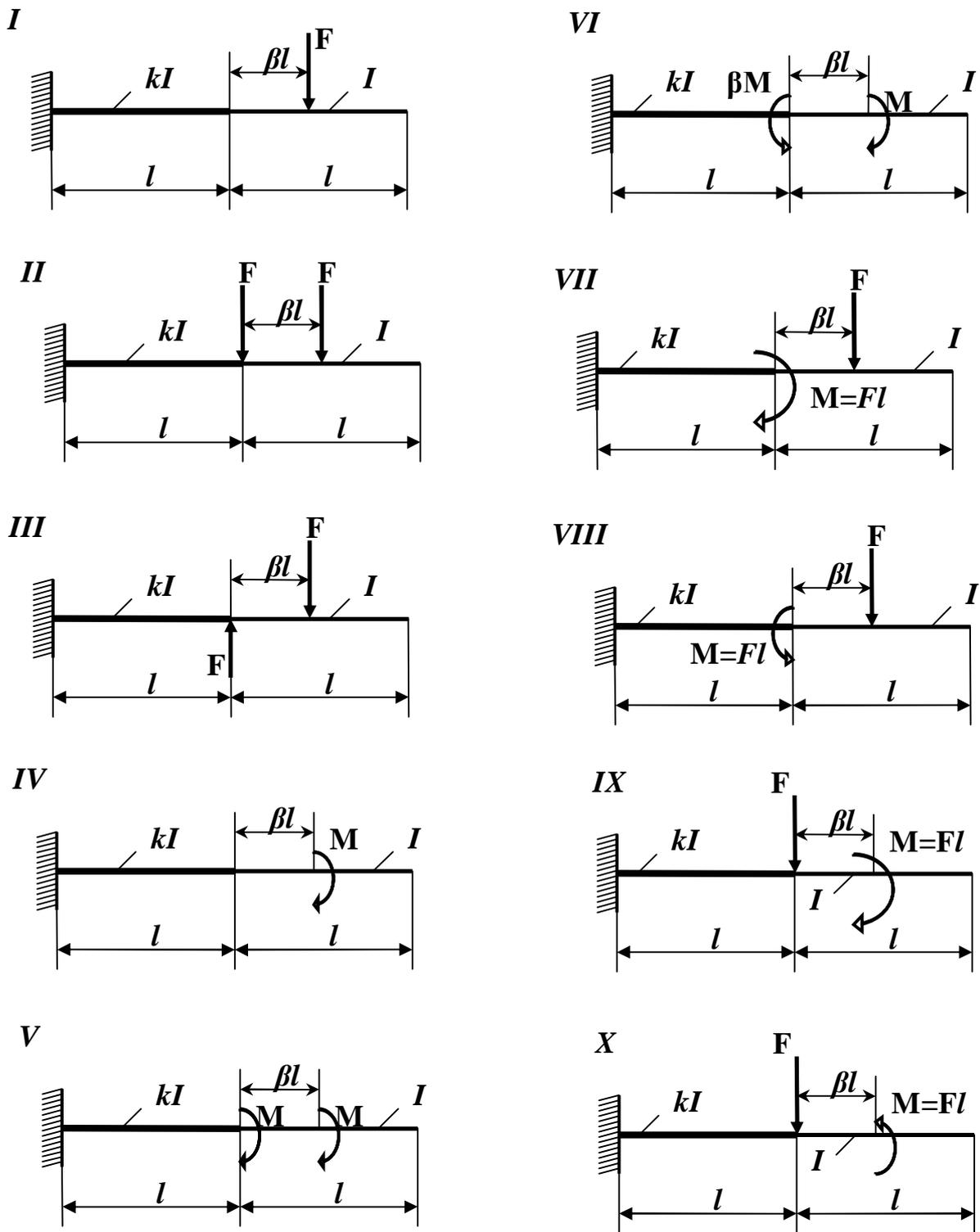


Рис. 7

Задача 8. Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 8, сжимается продольной силой F приложенной в точке А. Требуется: 1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F и размеры сечения; 2) найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и на растяжение $[\sigma_p]$. Данные взять из табл. 7.

Таблица 7

№ строки	Схема по рис.8	a	b	$[\sigma_c]$	$[\sigma_p]$	№ строки	Схема по рис. 8	a	b	$[\sigma_c]$	$[\sigma_p]$
		см		МПа				см		МПа	
1	I	6	6	110	21	6	VI	6	6	60	26
2	II	2	2	120	22	7	VII	2	2	70	27
3	III	3	3	130	23	8	VIII	3	3	80	28
4	IV	4	4	140	24	9	IX	4	4	90	29
5	V	5	5	150	25	0	X	5	5	100	30
	е	г	д	г	д		е	г	д	г	д

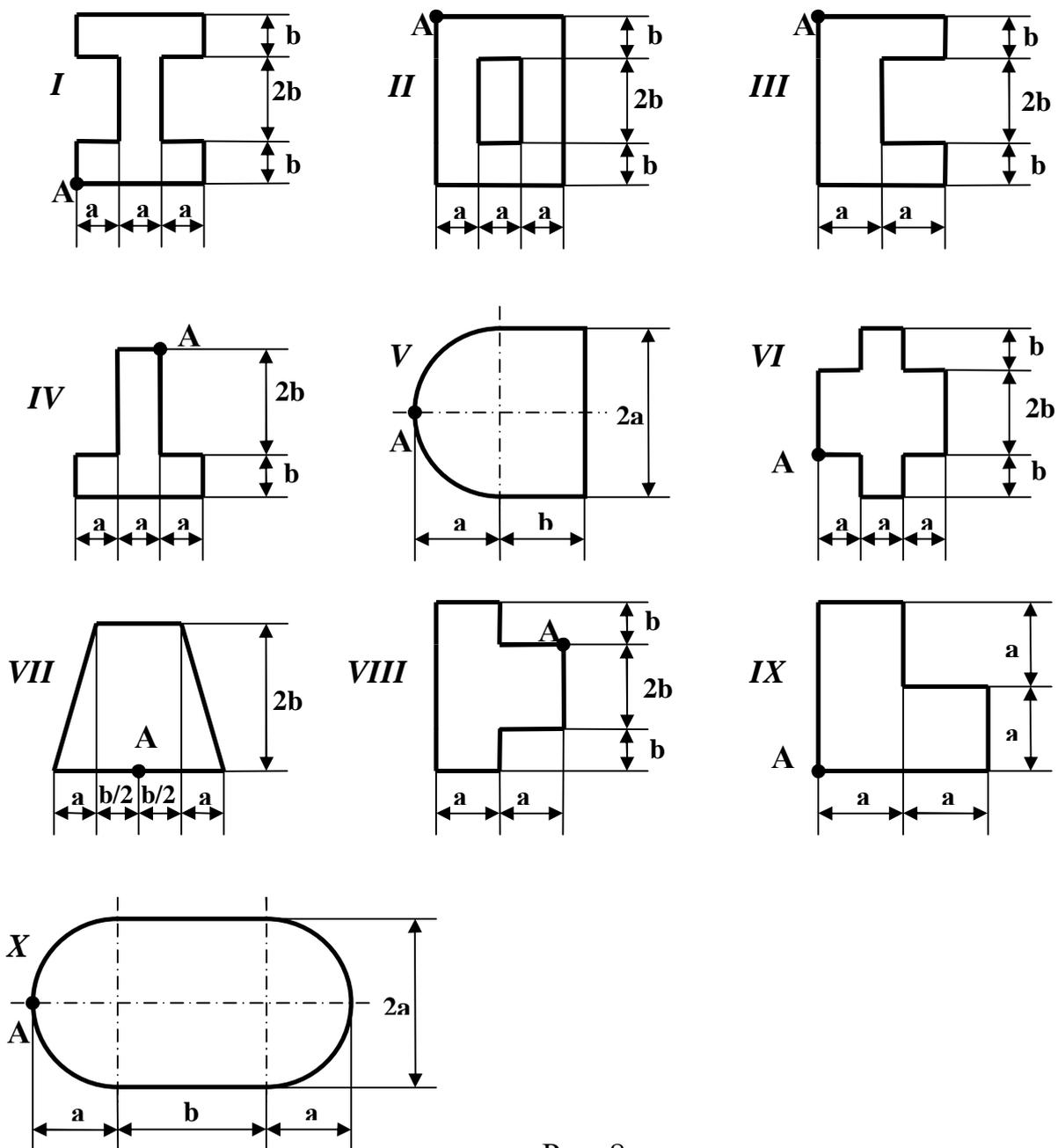


Рис. 8

Задача 9. На рис. 9 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости, с прямыми углами в точках А и В. На стержень действует вертикальная нагрузка. Требуется: 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов; 2) установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности. Данные взять из табл. 8.

Таблица 8

№ строки	Схема по рис. 9	α	№ строки	Схема по рис. 9	α
1	I	1,1	6	VI	0.6
2	II	1,2	7	VII	0.7
3	III	1,3	8	VIII	0.8
4	IV	1,4	9	IX	0.9
5	V	1,5	0	X	1.0
	д	е		д	е

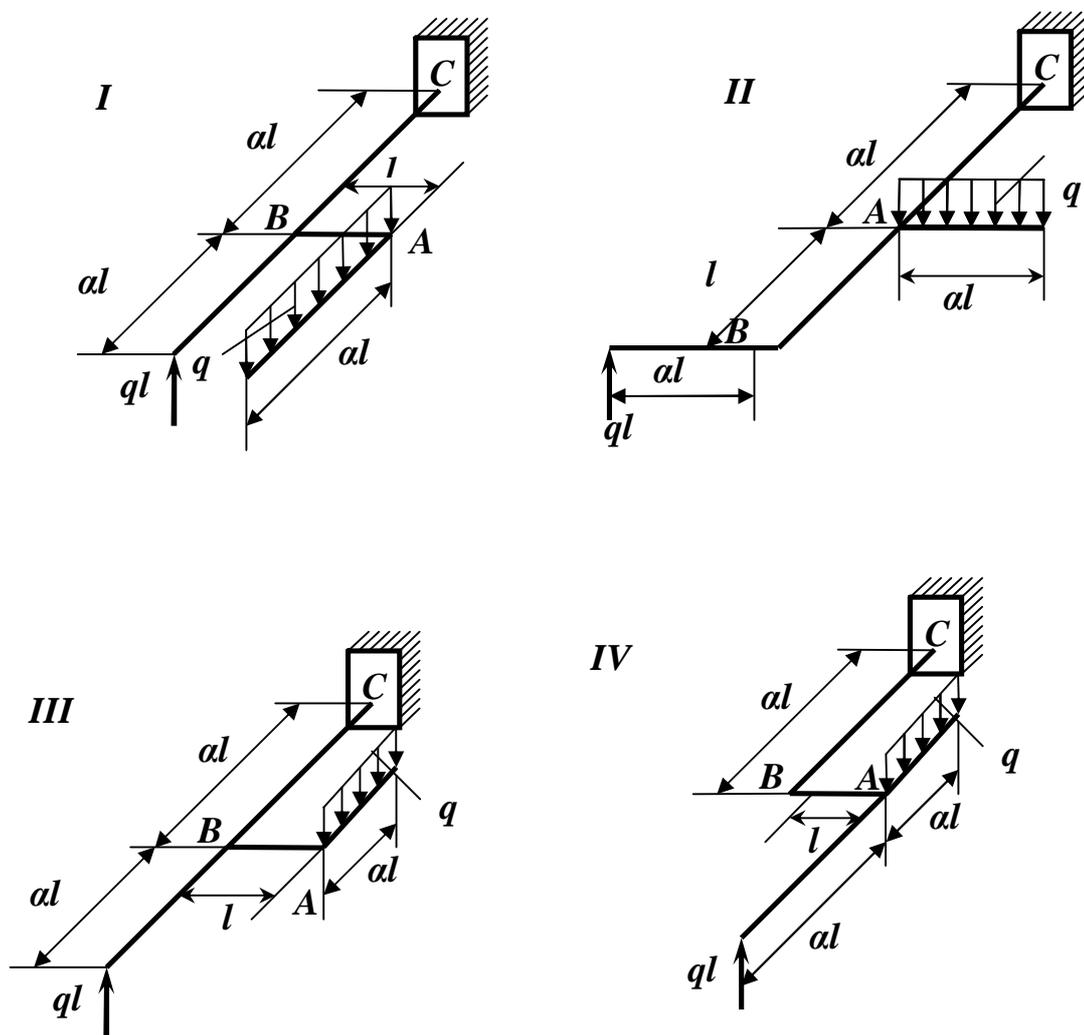
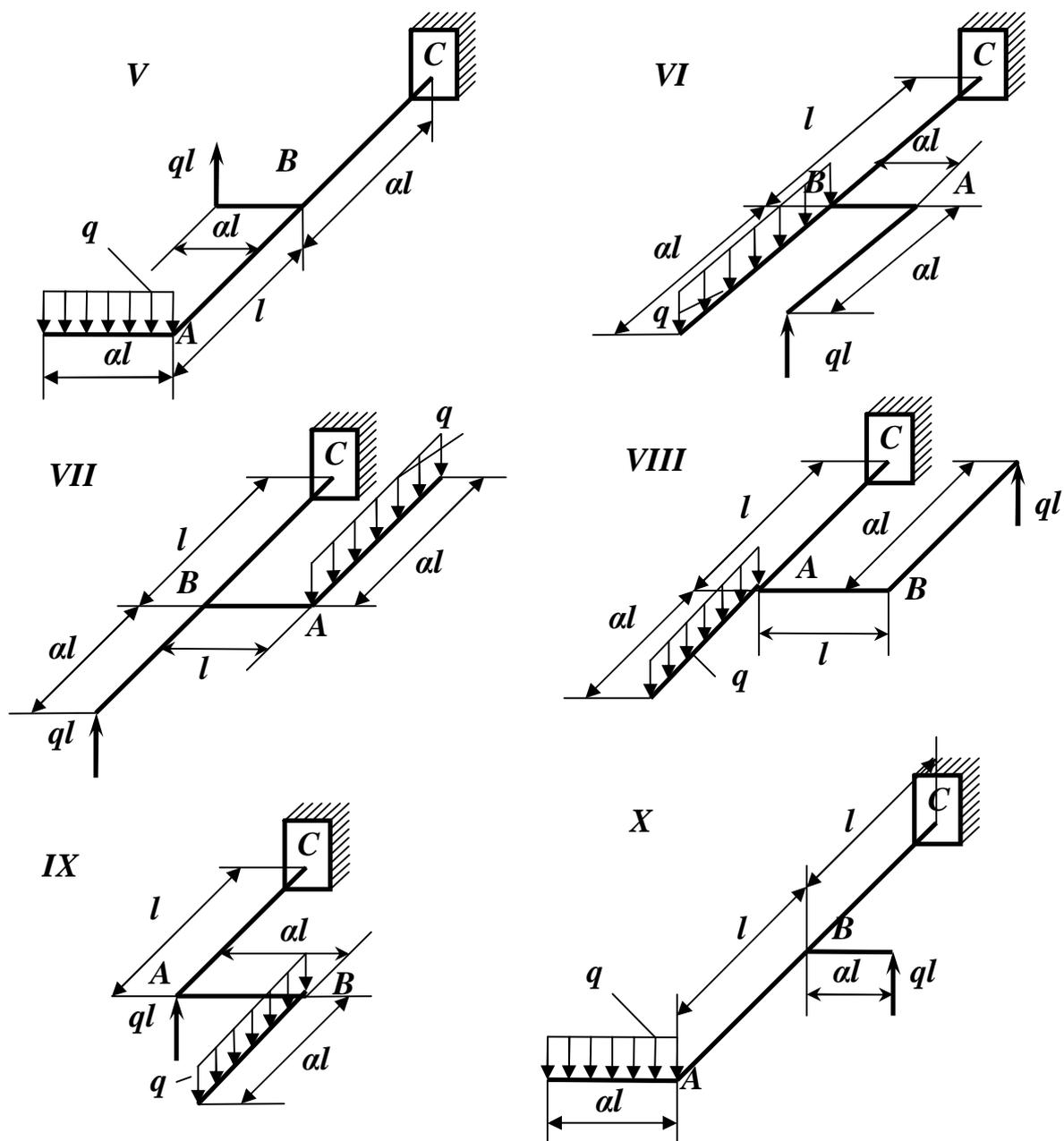


Рис. 9



Окончание рис. 9

Задача 10. Построить эпюры M , N , Q и найти нормальные напряжения в опасном сечении кривого стержня (рис. 10). Данные взять из табл. 9.

Указания. Силу F следует разложить на два направления: вертикальное и горизонтальное. Далее надо найти опорные реакции; для произвольного сечения, определяемого полярными координатами r и φ , написать выражения M , N , Q и, давая различные значения φ (не реже чем через 30°), построить эпюры по точкам.

При определении радиуса кривизны нейтрального слоя необходимо вычисления производить точно, так как величина r_0 близка к величине r и при определении s придется иметь дело с малой разностью величин r и r_0 .

Для проверки вычислений рекомендуется воспользоваться приближенной формулой $s = J/rA$, где J — момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси; A — площадь поперечного сечения.

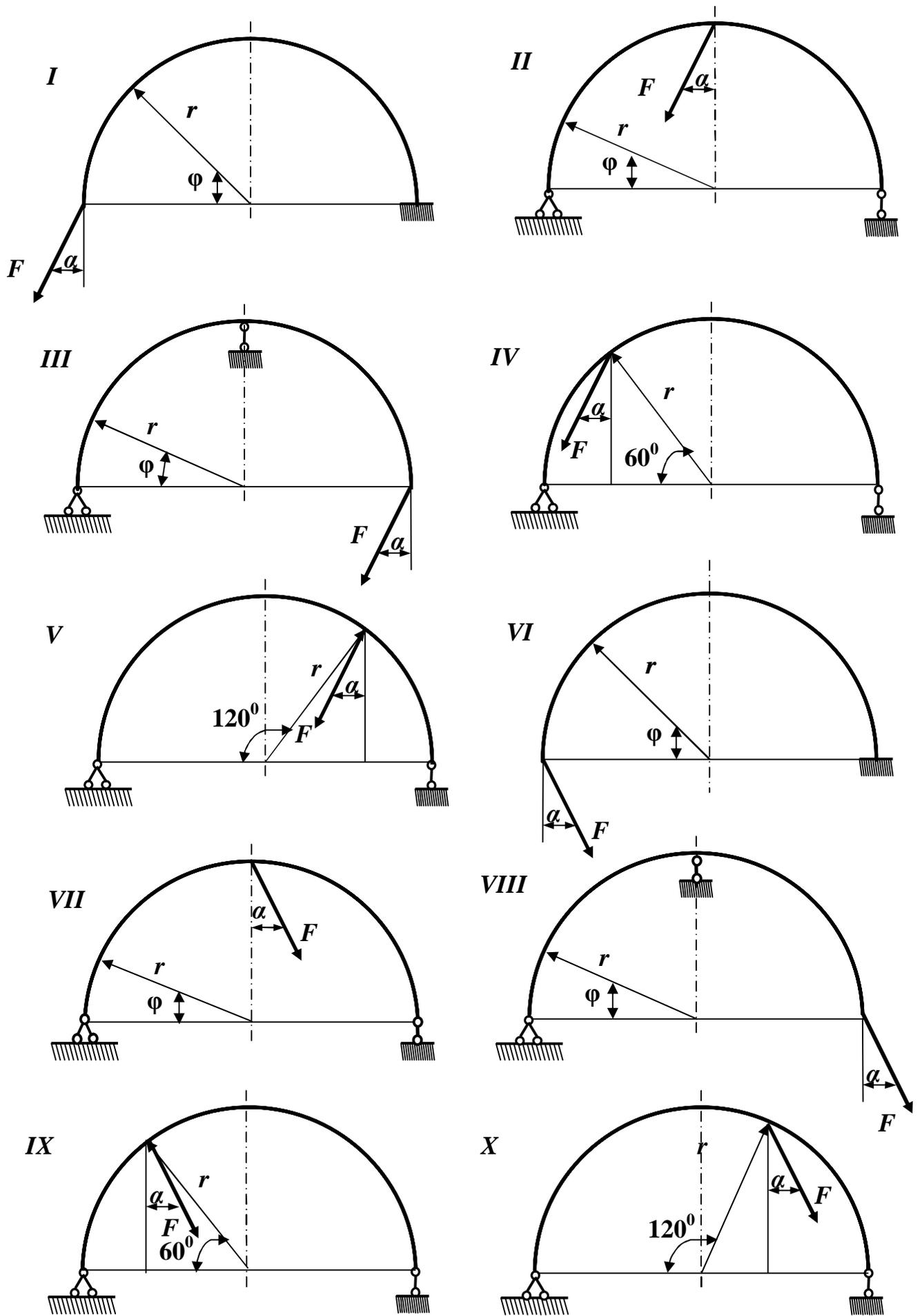
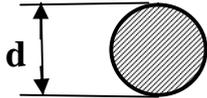
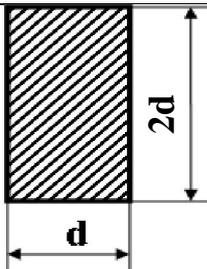
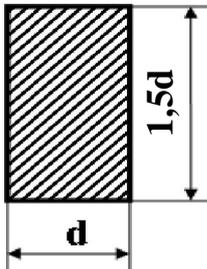
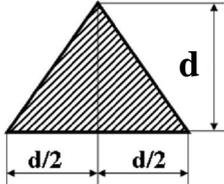
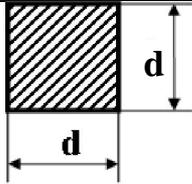


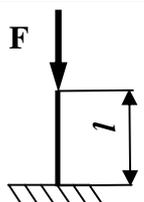
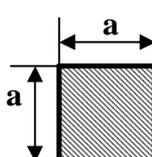
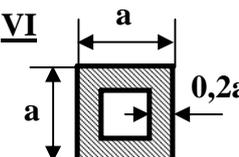
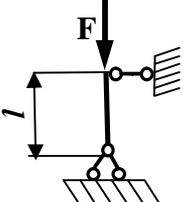
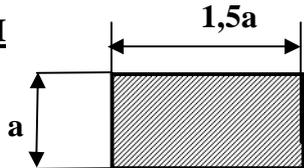
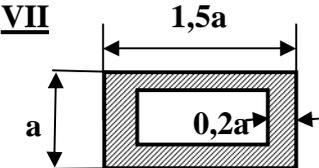
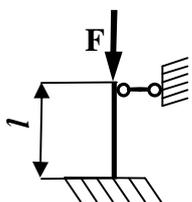
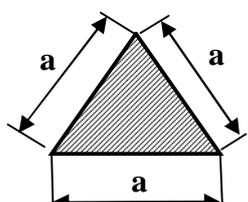
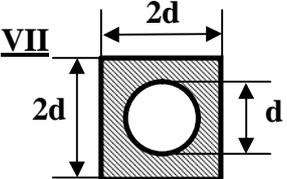
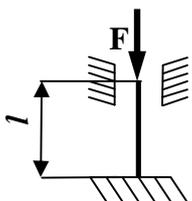
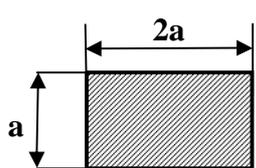
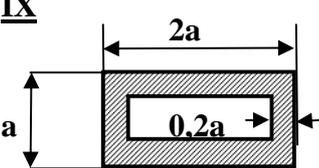
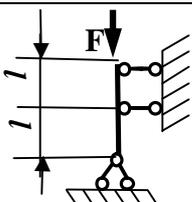
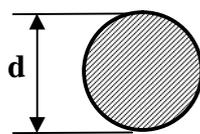
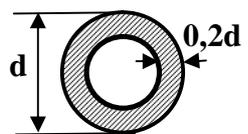
Рис. 9

Таблица 9

№ строки	Схема по рис. 10	α , град	F , Н	r	d	Форма сечения
				см		
1	I	10	1100	21	4,1	
2	II	20	1200	22	4,2	
3	III	30	1300	23	4,3	
4	IV	40	1400	24	4,4	
5	V	50	1500	25	4,5	
6	VI	60	1600	16	4,6	
7	VII	70	1700	17	4,7	
8	VIII	80	1800	18	4,8	
9	IX	90	1900	19	4,9	
0	X	0	2000	20	5,0	
	e	Δ	e	г	Δ	e

Задача 11. Стальной стержень длиной l сжимается силой F . Требуется:
 1) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160$ МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$); 2) найти значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости. Данные взять из табл. 10.

Таблица 10

№ строки	F , кН	l , м	Схема закрепления концов стержня	Форма сечения стержня
1 2	100 200	2,1 2,2		<u>I</u>  <u>VI</u> 
3 4	300 400	2,3 2,4		<u>II</u>  <u>VII</u> 
5 6	500 600	2,5 2,6		<u>III</u>  <u>VIII</u> 
7 8	700 800	2,7 2,8		<u>IV</u>  <u>IX</u> 
9 0	900 1000	2,9 3,0		<u>V</u>  <u>X</u> 
	Г	Д	Д	е

Задача 12. На двутавровую балку, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 11), с высоты h падает груз Q . Требуется: 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке; 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т. е. осадка от груза 1 кН) равна α ; 3) сравнить полученные результаты. Данные взять из табл. 11.

Указание. При наличии упомянутой в п. 2 пружины $\Delta_{ст} = \Delta_b + \beta \Delta_{пр}$, где Δ_b – прогиб балки, лежащей на жестких опорах, в том сечении, где приложена сила Q (при статическом действии этой силы); $\Delta_{пр}$ – осадка пружины от реакции, возникающей от силы Q ; β — коэффициент, устанавливающий зависи-

мость между осадкой пружины и перемещением точки приложения силы Q , вызванным поворотом всей балки вокруг центра шарнира левой опоры как жесткого целого (коэффициент β находят из подобия треугольников).

Таблица 11

№ строки	Схема по рис. 11	№ двутавра	l , м	Q , Н	h , см	$10^3 \alpha$, м/кН
1	I	20	2,1	1100	11	21
2	II	18	2,2	1200	12	22
3	III	24	2,3	300	3	23
4	IV	16	2,4	400	4	24
5	V	27	2,5	500	5	25
6	VI	30	2,6	600	6	26
7	VII	20	2,7	700	7	27
8	VIII	40	2,8	800	8	28
9	IX	33	2,8	900	9	29
0	X	36	3,0	1000	10	30
	е	д	е	г	д	е

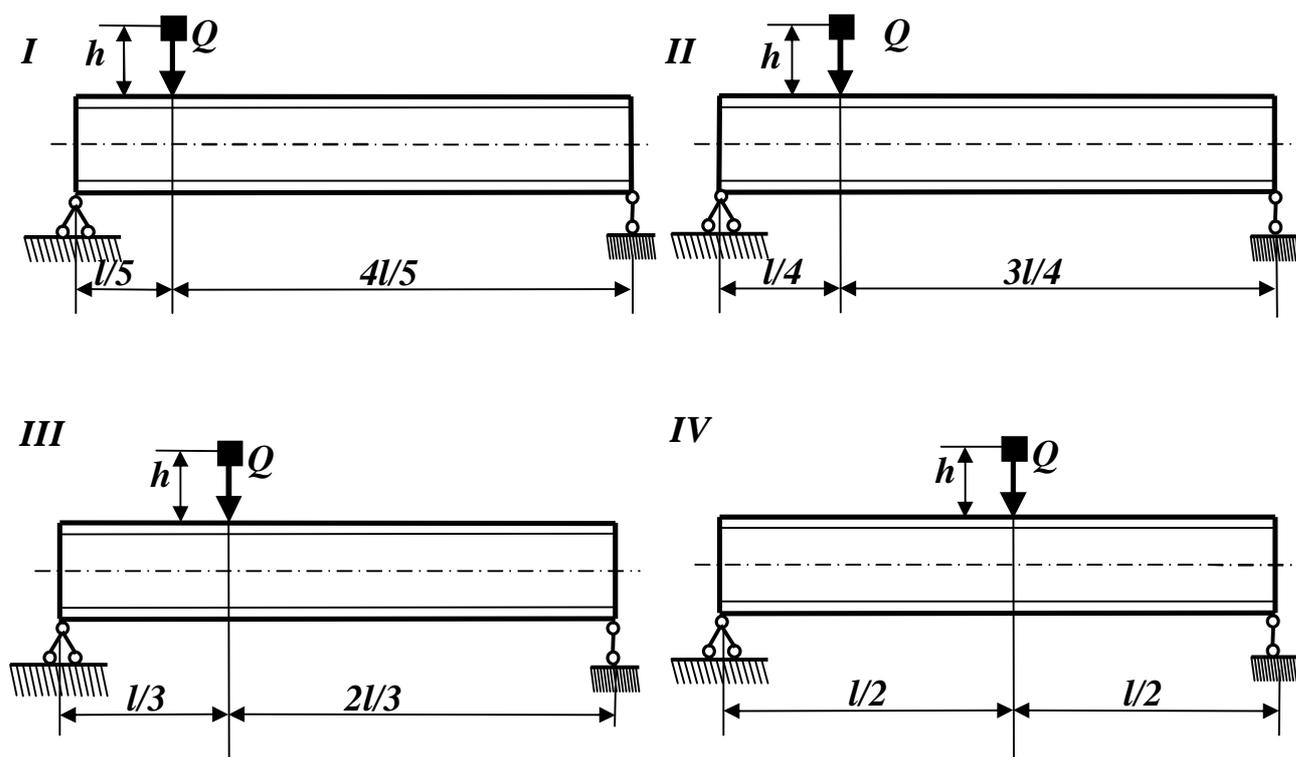
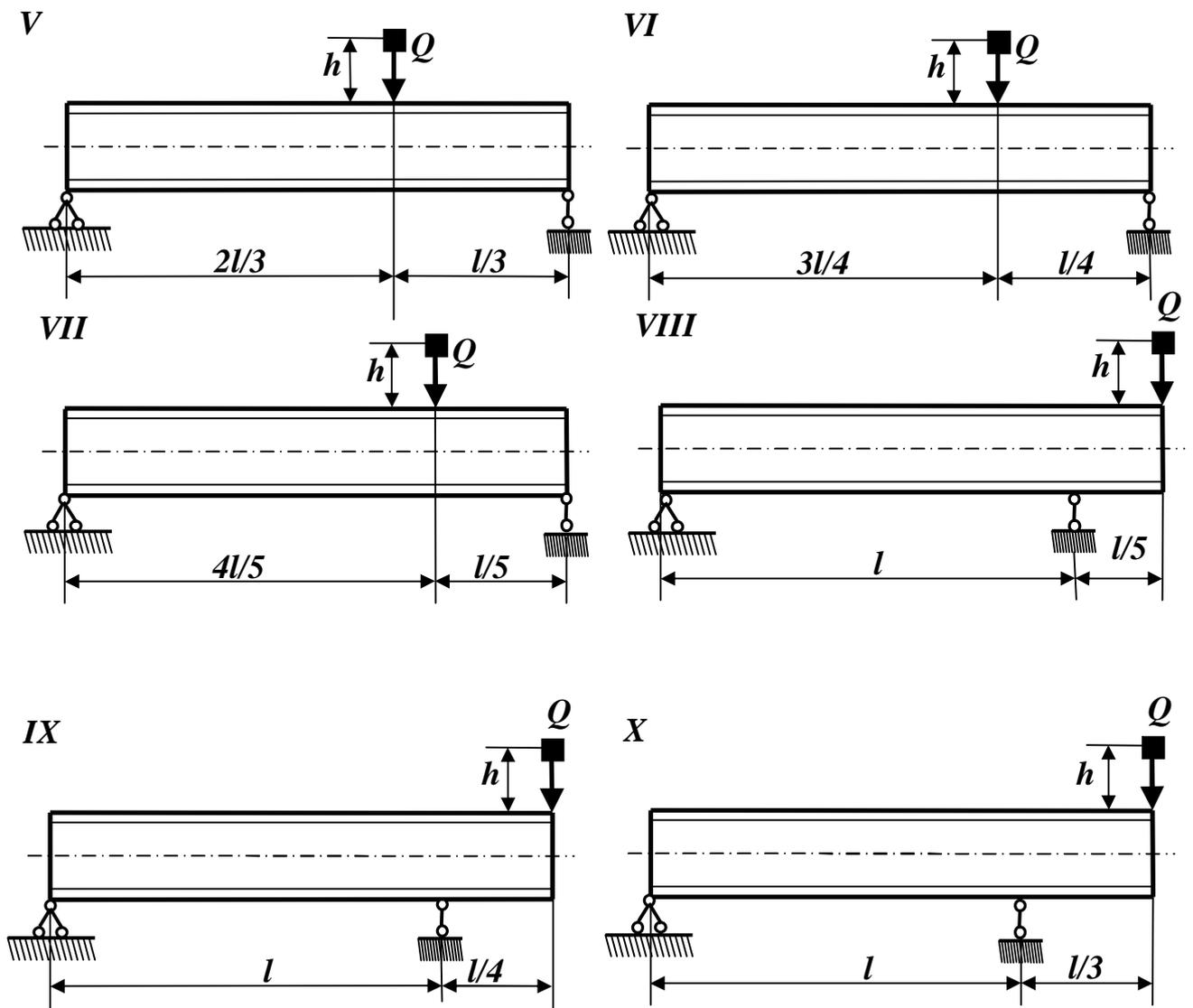


Рис. 11



Окончание рис. 11

2. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1.

Расчет статически неопределимых систем

Статически неопределимой называется система, усилия во всех элементах которой не могут быть определены с помощью только уравнений статики типа

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0.$$

Если для нахождения усилий в статически определимой системе достаточно составить уравнения равновесия статики, то для статически неопределимой системы следует составить дополнительные уравнения, вытекающие из рассмотрения ее деформированного состояния. Степень статической неопределимости равна разности между числом неизвестных усилий и числом уравнения статики.

Статически неопределимые системы, работающие на растяжение и сжатие, рассчитываются совместным решением уравнений, полученных в результате рассмотрения статической и геометрической сторон задачи. Для рассмотрения первой составляются уравнения статики, для второй – уравнения перемещений, то есть геометрические зависимости между удлинениями отдельных элементов системы. Деформации элементов системы выражаются через усилия по закону Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где Δl – удлинение или укорочение элементов; N – действующее в стержне усилие; l – длина стержня; E – модуль продольной упругости материала, из которой выполнен стержень, A – площадь сечения стержня.

Порядок расчета

1. Выявляется степень статической неопределимости системы по формуле $L = C_o - 3$, где C_o – число опорных связей.

2. Составляются уравнения равновесия отсеченных элементов, содержащих неизвестные усилия (решается статическая сторона задачи).

3. Рассматривается система в деформируемом состоянии (геометрическая сторона задачи). На чертеже указываются возможные перемещения (строится схема перемещений). Устанавливается связь между деформациями или перемещениями отдельных стержней. Перемещение или деформация элементов с помощью закона Гука выражаются через неизвестные усилия, действующие в стержнях.

Составляются уравнения совместной деформаций (физическая сторона задачи).

4. Решаются совместно эти две группы уравнений (синтез).

Пример. Абсолютно жесткий брус АВ опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис.12).

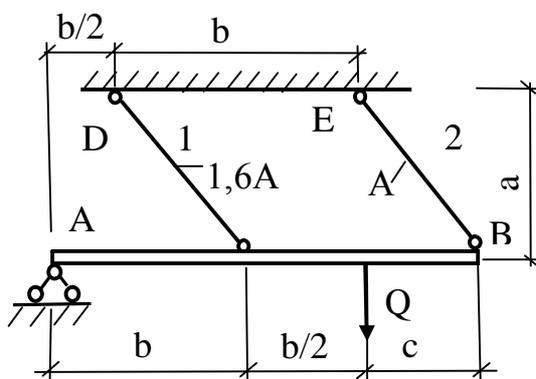


Рис. 12

Требуется:

1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ; 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{дон}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях к допускаемому напряжению $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$;

3) найти предельную грузоподъемность системы Q_T^K и допускаемую нагрузку $Q_{дон}$, если предел текучести $\sigma_T = 24 \text{ кН/см}^2$ и запас прочности $\kappa = 1,5$;

4) сравнить величины $Q_{дон}$, полученные при расчете по дополнительным напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Дано: $a = 1,0 \text{ м}$; $b = 1,2 \text{ м}$; $c = 1,2 \text{ м}$; $A = 6,31 \text{ см}^2$.

Решение.

1. Определим степень статической неопределимости системы (лишние неизвестные)

$$L = C_o - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Следовательно, система один раз статически неопределима, поэтому необходимо составить кроме уравнений статики еще одно уравнение перемещений.

2. Найдем усилия и напряжения в стержнях, для чего воспользуемся методом сечений. Разрежем опорные стержни, заменив их неизвестными усилиями N_1 и N_2 . Предварительно вычислим углы α_1 и α_2 (рис. 13):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b/2}{a} = \frac{0,6}{1} = 0,6; \quad \alpha_1 = 31^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1,2}{1} = 1,2; \quad \alpha_2 = 50^\circ.$$

Составим уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & -N_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot b - N_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot (1,5b + c) + Q \cdot 1,5b = 0; \\ & -N_1 \cdot 0,85 \cdot 1,2 - N_2 \cdot 0,64 \cdot (1,5 \cdot 1,2 + 1,2) + Q \cdot 1,5 \cdot 1,2 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$N_1 + 1,88 N_2 = 1,76 Q. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет два неизвестных усилия N_1 и N_2 , следовательно, нужно составить дополнительное уравнение. Для этого графически представим деформированное состояние системы (рис. 13). Из подобия треугольников

ACC_1 и ABB_1 имеем $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{b}{1,5b + c}$. Из рисунка видно, что

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha_1}, \quad \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha_2}.$$

Тогда

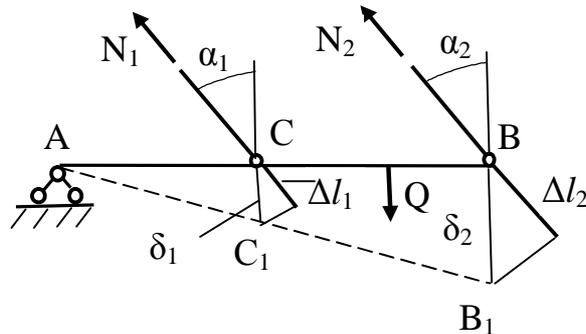


Рис. 13

$$\frac{\Delta l_1 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_1 \cdot \Delta l_2} = \frac{b}{1,5b + c} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{b \cos \alpha_1}{(1,5b + c) \cos \alpha_2};$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{1,2 \cdot 0,85}{(1,5 \cdot 1,2 + 1,2) \cdot 0,64} = 0,53. \quad (4)$$

Согласно закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2},$$

$$\text{где } l_1 = \sqrt{a^2 + (0,5b)^2} = \sqrt{1^2 + 0,6^2} = 1,16 \text{ м}; \quad l_2 = \sqrt{1^2 + 1,2^2} = 1,56 \text{ м};$$

$$A_1 = 1,6 \cdot A = 1,6 \cdot 6,31 = 10,10 \text{ см}^2; \quad A_2 = A = 6,31 \text{ см}^2.$$

Тогда отношение деформаций дает

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1 l_1 A_2 E}{E \cdot A_1 N_2 l_2} = \frac{N_1 \cdot 1,16 \cdot 6,31 E}{E \cdot 10,10 \cdot N_2 \cdot 1,56} = 0,46 \frac{N_1}{N_2}.$$

Подставим полученное значение в уравнение (4):

$$0,46 \frac{N_1}{N_2} = 0,53, \quad \text{откуда } N_1 = 1,13 N_2.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} N_1 + 1,88 N_2 &= 1,76 Q, \\ N_1 - 1,13 N_2 &= Q, \end{aligned}$$

решив которую, найдем неизвестные силы

$$N_1 = 0,66 Q; \quad N_2 = 0,58 Q \quad (\text{здесь в килоньютонах}).$$

Напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,66Q}{10,10} = 0,065Q \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,58Q}{6,31} = 0,092Q \text{ кН/см}^2.$$

3. Определим допускаемую нагрузку

$$\sigma_2 \leq [\sigma]; \quad 0,092Q = 16; \quad Q = \frac{16}{0,092} = 173,9 \text{ кН}.$$

4. Подставим значения предельных усилий и найдем предельную грузоподъемность системы и допускаемую нагрузку с учетом пластических деформаций:

$$N_1 = \sigma_T A_1 = 24 \cdot 10,10 = 242,4 \text{ кН};$$

$$N_2 = \sigma_T A_2 = 24 \cdot 6,31 = 151,44 \text{ кН}.$$

Введя их в уравнение (1), получим

$$242,4 + 1,88 \cdot 151,44 = 1,76Q_T^K,$$

откуда

$$Q_T^K = 299,5 \text{ кН}.$$

$$Q_{\text{доп}} = \frac{Q_T^K}{k} = \frac{299,5}{1,5} = 199,7 \text{ кН}.$$

5. Сравним величины, полученные по допускаемым нагрузкам $Q_{\text{доп}}$ и допускаемым напряжениям Q :

$$n = \frac{Q_{\text{доп}}}{Q} = \frac{199,7}{173,9} = 1,15,$$

и приходим к выводу, что допускаемая нагрузка с учетом пластических деформаций в 1,15 раза больше, чем при расчете по допускаемым напряжениям.

Задача №2

Расчет стержня переменного сечения

Жесткий брус прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения A , опирающимся на неподвижное основание. К брусу прикреплен средний ступенчатый стержень с зазором $\Delta = \beta C$ (рис.14).

Требуется: 1) установить при какой силе зазор закроется; 2) найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении сил H и построить эпюру продольных сил для среднего стержня; 3) найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданном значении сил H ; 4) установить, на сколько градусов надо охладить средний стержень, чтобы ре-

акция основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении сил H обратилась в нуль.

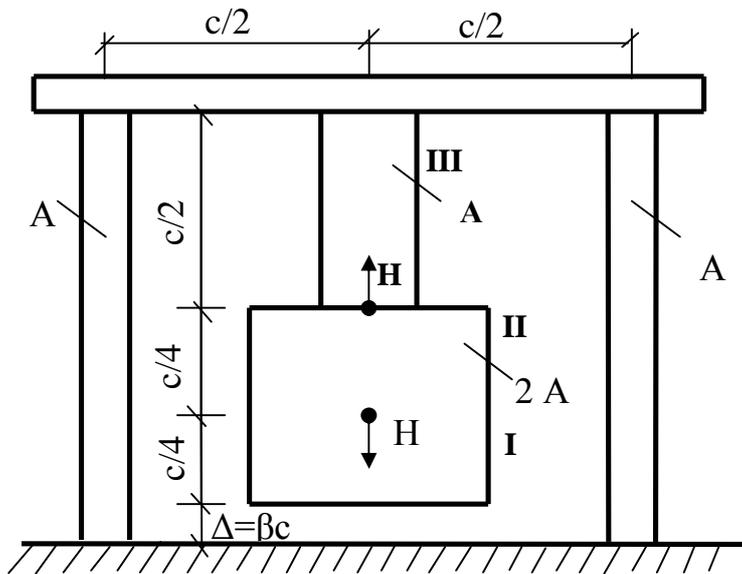


Рис. 14

Дано:

$$A = 20 \text{ см}^2; C = 1 \text{ м};$$

$$H = 160 \text{ кН}; 10^5 \cdot \beta = 5.$$

Для стали

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН / см}^2.$$

Решение.

1. Установим, при какой силе H зазор Δ закроеется.

Величина зазора

$$\Delta = \beta \cdot C = \frac{5}{10^5} C = \frac{5}{10^5} \cdot 100 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Он закроется при условии

$$\Delta l_C + \Delta l_K = \Delta, \quad (5)$$

где Δl_C - деформация среднего стержня; Δl_K - деформация крайних стержней.

Воспользуемся формулой $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, где l - длина участка стержня.

Разделив средний стержень (см. рис. 14) на три участка, можно записать

$$\Delta l_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 + \frac{H \cdot \left(\frac{c}{4}\right)}{E(2A)} + 0 = \frac{H \cdot C}{8EA}; \quad \Delta l_K = \frac{(H - H) \cdot C}{E(2A)} = 0.$$

Подставив соответствующее значение в формулу (5), получаем

$$\frac{H \cdot C}{8EA} = \frac{5}{10^5} C; \quad H = \frac{40EA}{10^5} = \frac{40 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 20}{10^5} = 16,8 \text{ кН}.$$

2. Найдем реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении силы $H=160$ кН и построим эпюру продольных сил (рис. 15).

2.1. Составим уравнение равновесия $\sum Y = 0; H - H - 2R_K + R_C = 0;$

откуда $R_K = \frac{R_C}{2}.$

2.2. Определим удлинение крайнего стержня

$$\Delta l_K = \frac{R_K l_K}{EA} = \frac{R_C l_K}{2EA} = \frac{R_C \cdot 100}{2EA} = 50 \frac{R_C}{EA}.$$

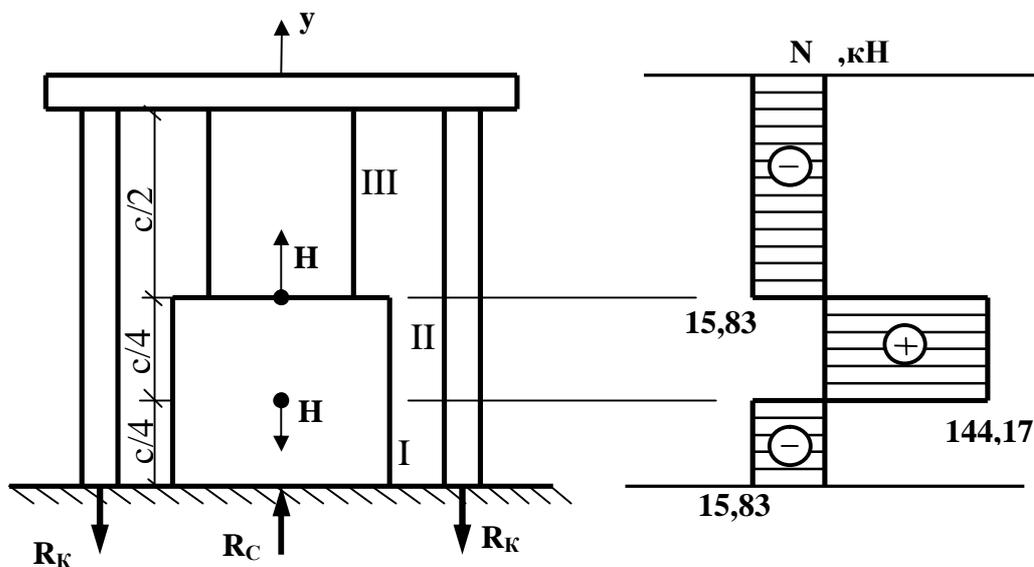


Рис. 15

2.3. Найдем удлинение среднего стержня от действия заданной нагрузки:

$$\Delta l_C^H = 0 + \frac{H \cdot 0,25C}{E(2A)} + 0 = \frac{0,125H \cdot C}{EA} = \frac{12,5H}{EA}.$$

2.4. Определим укорочение среднего стержня от неизвестной реакции R_C :

$$\Delta l_C^R = \frac{R_C}{E} \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} \right) = \frac{R_C}{EA} \cdot \left(\frac{C}{8} + \frac{C}{8} + \frac{C}{2} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{R_C \cdot C}{EA} = \frac{75 \cdot R_C}{EA}.$$

2.5. Тогда полная деформация среднего стержня

$$\Delta l_C = \Delta l_C^H - \Delta l_C^R - \Delta = \frac{12,5H}{EA} - \frac{75R_C}{EA} - 5 \cdot 10^{-5}.$$

2.6. Определим величину реакции из условия $\Delta l_C = \Delta l_K$

$$\frac{12,5H}{EA} - \frac{75R_C}{EA} - 5 \cdot 10^{-5} = 50 \frac{R_C}{EA}.$$

Помножив на EA , получим

$$12,5H - 5 \cdot 10^{-5} \cdot EA = 50R_C + 75R_C$$

или

$$12,5 \cdot 160 - 5 \cdot 10^{-5} \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 20 = 125R_C,$$

откуда

$$R_C = \frac{1975}{125} = 15,83 \text{ кН}.$$

Вычислим продольные силы для среднего стержня:

для участка I $N_1 = -R_C = -15,83 \text{ кН};$

для участка II $N_2 = -R_C + H = -15,83 + 160 = 144,17 \text{ кН}$;

для участка III $N_3 = -R_C + H - H = -15,83 \text{ кН}$.

3. Найдем усилия и напряжения в крайних стержнях:

$$N_K = R_K = \frac{R_C}{2} = \frac{15,83}{2} = 7,915 \text{ кН};$$

$$\sigma_K = \frac{N_K}{A} = \frac{7,91}{20} = 0,3955 \text{ кН/см}^2.$$

4. Определим величину температуру t на которую необходимо охладить средний стержень, чтобы $R_C = 0$. Для этого следует удовлетворить условие

$$\Delta l_C^H - \Delta - \Delta l_C^t = 0, \quad (6)$$

где Δl_C^t – деформация среднего стержня от изменения температуры $\Delta l_C^t = \alpha \cdot c \cdot t$; α – коэффициент температурного изменения (для стали $\alpha = 10^{-5}$); t – температура.

Подставив в уравнение (6) соответствующие значения, получаем

$$\frac{12,5H}{EA} - \frac{5}{10^5} C - \alpha \cdot C \cdot t = 0;$$

$$\frac{12,5 \cdot 160}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 20} - \frac{5}{10^5} \cdot 100 - 10^{-5} \cdot 100 \cdot t = 0. \quad (7)$$

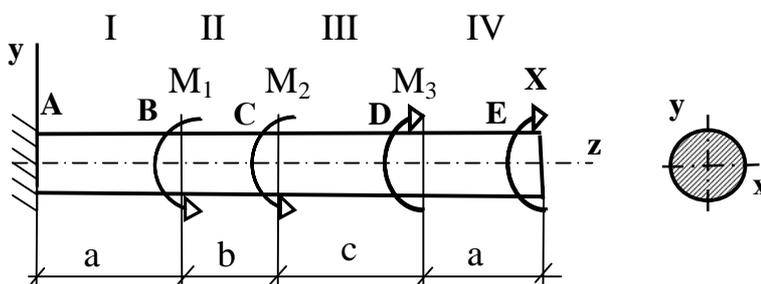
Умножив выражение (7) на 10^3 , будем иметь

$$47,62 - 5 - t = 0; \quad t = 42,6^\circ.$$

Задача №3

Расчет стержня на кручение

К стальному валу приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 (рис. 16). Требуется: 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю; 2) после определения значения X построить эпюру крутящих моментов; 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей величины, соответственно равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 100; 4) построить эпюру углов закручивания; 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины).



Дано: $a = 2 \text{ м}$; $b = 1,3 \text{ м}$;
 $c = 2 \text{ м}$; $M_1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
 $M_2 = 1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_3 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
 $[\tau] = 45 \text{ МПа}$.

Рис. 16

Решение.

1. Определим момент X . Покажем оси координат x, y, z (рис. 16). Обозначим буквами A, B, C, D, E характерные сечения бруса, ограничивающие участки I, II, III, IV. Будем искать X из условия, что $\varphi_{EA} = 0$, то есть суммарный угол поворота сечения E относительно сечения A от всех действующих на брус моментов должен быть равен нулю.

Момент M_1 закручивает только участок I, так что сечение E повернется при этом на тот же угол, что и сечение B , то есть

$$\varphi_{BA} = \varphi_{EA} = \frac{M_1 a}{GJ_p}.$$

Момент M_2 закручивает участки I и II, то есть

$$\varphi_{CA} = \varphi_{EA} = \frac{M_2(a+b)}{GJ_p}.$$

Так как момент M_3 закручивает участки I, II и III в противоположную сторону, то углу поворота присваиваем знак «минус», то есть

$$\varphi_{DA} = \varphi_{EA} = \frac{-M_3(a+b+c)}{GJ_p}.$$

Аналогично от момента X

$$\varphi_{EA} = \frac{-X(2a+b+c)}{GJ_p}.$$

В соответствии с условием задачи должны иметь

$$\varphi_{EA} = \varphi_{EA}^I + \varphi_{EA}^{II} + \varphi_{EA}^{III} + \varphi_{EA}^{IV} = 0.$$

Подставив соответствующие значения, получаем

$$\frac{I}{GJ_p} (M_1 a + M_2(a+b) - M_3(a+b+c) - X(2a+b+c)) = 0.$$

Умножив обе части равенства на GJ_p и используя численные значения, будем иметь:

$$2 \cdot 2 + 1,3(2+1,3) - 2(2+1,3+2) - X(4+1,3+2) = 0,$$

откуда найдем

$$X = \frac{4 + 4,29 - 10,6}{7,3} = -0,316 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Изобразим расчетную схему бруса (рис. 17а), строго выдержав масштаб длины, поставим на ней численные значения действующих на брус внешних моментов и построим эпюру крутящих моментов (рис. 17б).

3. Запишем условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} \leq [\tau] = 45 \text{ МПа} = 4,5 \text{ кН} / \text{см}^2.$$

Отсюда $W_P = \frac{M_z^{\max}}{[\tau]} = \frac{168}{4,5} = 37,3 \text{ см}^3$. Поскольку для круглого сплошного сечения $W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$, то тогда $37,3 \leq \pi \cdot d^3 / 16$, откуда $d \geq 5,75 \text{ см}$. Примем вал диаметром $d = 60 \text{ мм}$ и найдем величину полярного момента инерции

$$J_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127,2 \text{ см}^4.$$

Примечание. Для материала вала (сталь) $G = 0,84 \cdot 10^4 \text{ кН} / \text{см}^2$.

4. Вычислим углы закручивания вала по формуле $\varphi = \frac{M_z l}{G J_P}$:

на первом участке (участок АВ)

$$\varphi_I = \frac{162 \cdot 200}{0,84 \cdot 10^4 \cdot 127,2} = 0,0303 \text{ рад};$$

на других участках:

$$\varphi_{II} = \frac{-38 \cdot 130}{0,84 \cdot 10^4 \cdot 127,2} = -0,00462 \text{ рад};$$

$$\varphi_{III} = \frac{-168 \cdot 200}{0,84 \cdot 10^4 \cdot 127,2} = -0,0314 \text{ рад};$$

$$\varphi_{IV} = \frac{32 \cdot 200}{0,84 \cdot 10^4 \cdot 127,2} = 0,00599 \text{ рад}.$$

Построенная эпюра углов закручивания представлена на рис. 17в.

5. Вычислим относительные углы закручивания на участках I, II, III, IV:

$$\Theta_1 = \frac{\varphi_I}{l_1} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{0,0303}{2} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,86 \text{ град} / \text{м};$$

$$\Theta_2 = \frac{-0,00462}{1,3} \cdot \frac{180}{3,14} = -0,20 \text{ град} / \text{м};$$

$$\Theta_3 = \frac{-0,0314}{2} \cdot \frac{180}{3,14} = -0,90 \text{ град} / \text{м};$$

$$\Theta_4 = \frac{0,00599}{2} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,17 \text{ град} / \text{м}.$$

Таким образом $\Theta_{\max} = 0,90 \text{ град} / \text{м} = \Theta_3$.

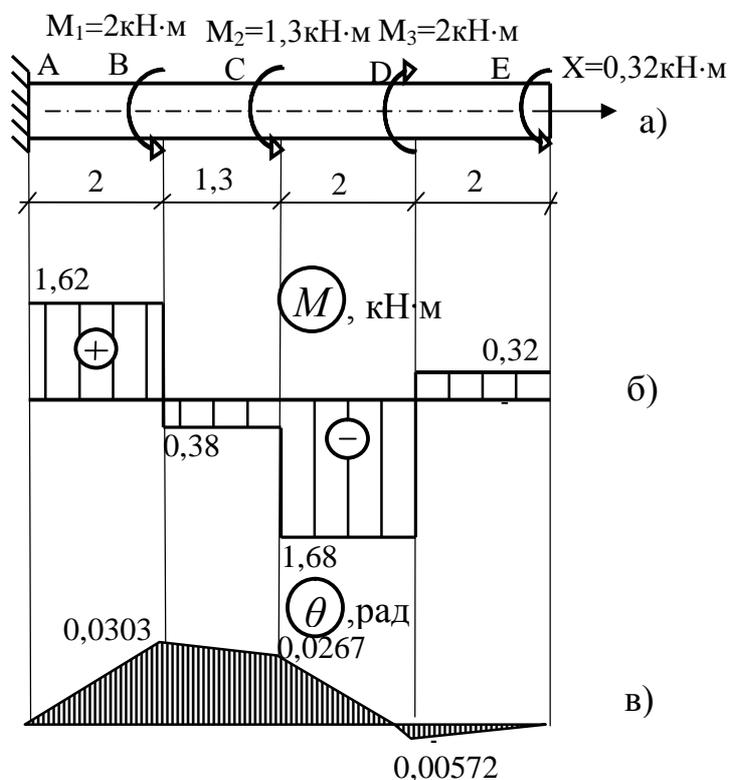


Рис. 17

Задача №4

Определение геометрических характеристик

Для изображенной на схеме плоской фигуры (рис. 18) требуется: 1) определить положение центра тяжести сечения; 2) вычислить осевые и центробежный моменты инерции относительно произвольных осей, проходящих через центр тяжести сечения; 3) определить положение главных центральных осей инерции; 4) вычислить значения главных моментов инерции относительно этих осей; 5) построить эллипс инерции.

Решение

Выпишем данные из таблиц сортаментов:

– для двутавра № 36:

$h = 360 \text{ мм}$, $b = 145 \text{ мм}$, $d = 7,5 \text{ мм}$, $t = 12,3 \text{ мм}$, $A = 61,9 \text{ см}^2$, $J_x = 13380 \text{ см}^4$, $J_y = 516 \text{ см}^4$;

– для швеллера № 24:

$h = 240 \text{ мм}$, $b = 90 \text{ мм}$, $d = 5,6 \text{ мм}$, $t = 10 \text{ мм}$, $A = 30,6 \text{ см}^2$, $J_x = 208 \text{ см}^4$, $J_y = 2900 \text{ см}^4$, $z_0 = 2,42 \text{ см}$;

– для вертикального листа 500 ? 12 мм:

$$A = 60 \text{ см}^2, \quad J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 50^3}{12} = 12500 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{1,2^3 \cdot 50}{12} = 7,2 \text{ см}^4.$$

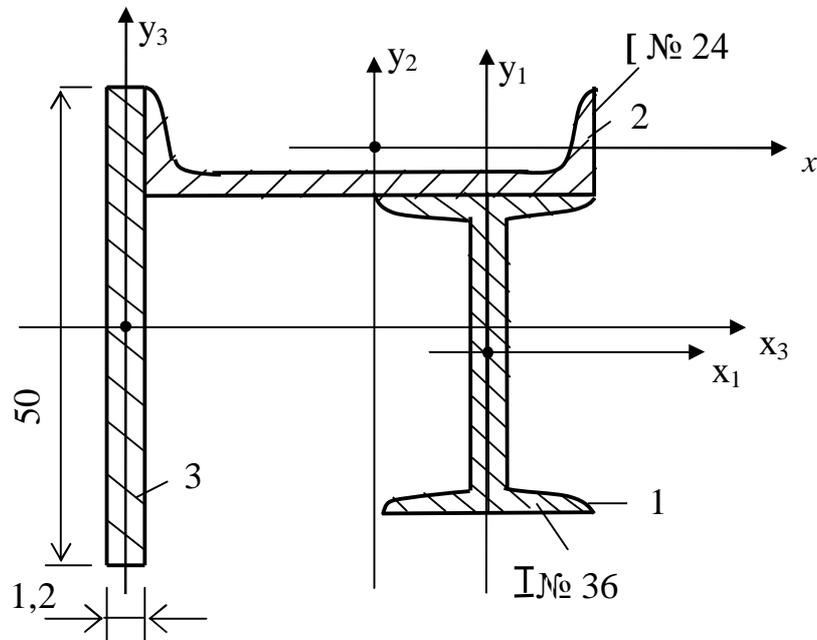


Рис. 18

1. Определим положение центра тяжести сечения. Площадь составного сечения $A = A_1 + A_2 + A_3 = 61,9 + 30,6 + 60 = 152,5 \text{ см}^2$. В качестве вспомогательных осей выберем главные оси двутавра. Тогда:

$$x_0 = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{0 + 30,6 \cdot (-4,75) + 60 \cdot (-17,35)}{152,5} = -7,78 \text{ см.}$$

$$y_0 = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{0 + 30,6 \cdot 20,42 + 60 \cdot 2}{152,2} = 4,9 \text{ см.}$$

Отложив эти значения по координатным осям, получим положение центра тяжести. Проведем центральные оси x_0 и y_0 (рис. 19).

2. Вычислим осевые и центробежный моменты инерции:

$$J_{x_0} = \sum (J_{x_i} + A_i a_i^2) = (13\,380 + 61,9 \cdot (-4,9)^2) + (208 + 30,6 \cdot 15,52^2) + (12\,500 + 60 \cdot (-2,9)^2) = 35\,450,61 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_0} = \sum (J_{y_i} + A_i b_i^2) = (516 + 61,9 \cdot (-7,78)^2) + (2\,900 + 30,6 \cdot 3,03^2) + (7,2 + 60 \cdot (-9,57)^2) = 12\,948,96 \text{ см}^4.$$

$$J_{x_0 y_0} = \sum (J_{x y_i} + A_i a_i b_i) = (0 + 61,9 \cdot (-4,9) \cdot 7,78) + (0 + 30,6 \cdot 15,52 \cdot 3,03) + (0 + 60 \cdot (-2,9) \cdot (-9,57)) = 742,51 \text{ см}^4.$$

3. Определим положение главных центральных осей инерции. Угол их наклона по отношению к исходным осям x_0 и y_0 найдем по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{x_0 y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}}.$$

Подставив соответствующие значения, получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 742,51}{12\,948,96 - 35\,450,61} = -\frac{1\,485,02}{22\,501,65} = -0,066.$$

$$2\alpha = -3,78^\circ, \alpha = -1,89^\circ.$$

Отложим значение угла α от оси x_0 по ходу часовой стрелки и проведём главные оси U и V (рис. 19).

$$\sin\alpha = -0,033; \sin 2\alpha = -0,066;$$

$$\cos\alpha = 0,999; \cos 2\alpha = 0,998.$$

4. Главные моменты инерции сечения вычислим по формулам:

$$J_u = J_{x_0} \cos^2\alpha + J_{y_0} \sin^2\alpha - J_{x_0y_0} \sin 2\alpha;$$

$$J_v = J_{x_0} \sin^2\alpha + J_{y_0} \cos^2\alpha + J_{x_0y_0} \sin 2\alpha;$$

Подставив цифровые значения получим:

$$J_u = 35\,450,61 \cdot 0,999^2 + 12\,948,96 \cdot (-0,033)^2 - 742,51 \cdot (-0,066) = 35\,475,08 \text{ см}^4.$$

$$J_v = 35\,450,61 \cdot (-0,033)^2 + 12\,948,96 \cdot (0,998)^2 + 742,51 \cdot (-0,066) = 12\,924,49 \text{ см}^4.$$

Положение главных осей U и V представлено на рис. 19.

5. Вычислим радиусы инерции:

$$r_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{35\,475,08}{152,5}} = 15,25 \text{ см};$$

$$r_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{12\,924,49}{152,5}} = 9,2 \text{ см}.$$

Отложим значения r_u и r_v построим эллипс инерции (рис. 19). Значение r_u принято откладывать по оси V , а значение r_v по оси U .

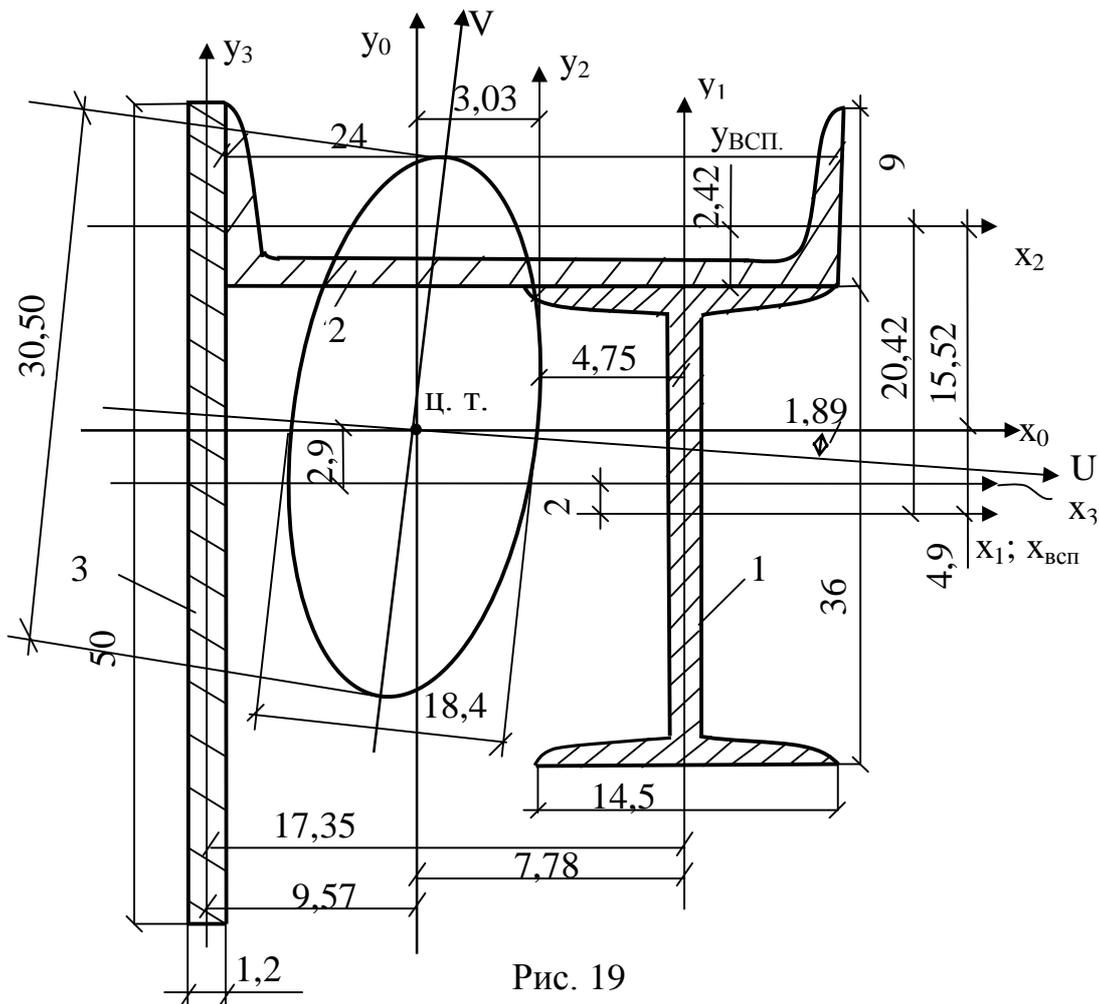


Рис. 19

Задача №5

Расчет балок на прочность

А). **Правило знаков.** В поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Сила Q в произвольном сечении балки будет положительной, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по часовой стрелке.

Изгибающий момент M в любом поперечном сечении балки будет положительным, если слева от сечения он стремится повернуть отсечённую часть балки относительно данного сечения по часовой стрелке, а справа – против нее.

Б). **Правила и порядок построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.**

1. Если на некотором участке балки действует равномерно распределённая нагрузка, то эпюра поперечных сил на этом участке изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов – по закону квадратной параболы.

2. Если на некотором участке балки отсутствует распределённая нагрузка, то эпюра поперечных сил на этом участке параллельна оси балки, а эпюра изгибающих моментов представляет собой наклонную прямую.

3. В сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент достигает своего экстремального значения, то есть имеет максимальное и минимальное значение.

4. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная нагрузка F , перпендикулярная оси балки, эпюра поперечных сил изменяется скачкообразно на величину этой силы, а эпюра изгибающих моментов имеет излом.

5. В сечении, где приложен момент, на эпюре изгибающих моментов будет скачок на величину этого сосредоточенного момента; на эпюру поперечных сил внешний сосредоточенный момент влияния не оказывает.

6. Если в сечении на свободном или шарнирно опёртом конце балки не приложен внешний сосредоточенный момент, то изгибающий момент равен нулю, а если приложен, то будет равен величине этого внешнего сосредоточенного момента.

7. В сечении, совпадающем с заделкой, поперечная сила и изгибающий момент численно равны соответственно опорной реакции и реактивному изгибающему моменту.

8. Для определения внутренних усилий балка разбивается на участки, границами которых являются точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, а также начала и окончания действия распределённых нагрузок или изменения их характера.

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов следует придерживаться следующего порядка:

1. Составляется расчётная схема балки с изображением действующих на нее внешних нагрузок, на которой указываются направление и начало отсчёта «х» для каждого участка.

2. Составляются и решаются уравнения равновесия балки, в результате чего определяются величины опорных реакций и указываются их обозначения и направления на опорах балки.

3. Составляются уравнения для определения величин поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка балки и по ним вычисляются ординаты эпюр для наиболее характерных сечений балки в количестве, достаточном для их построения.

4. Определяются сечения, в которых поперечная сила равна нулю, а следовательно, действуют экстремальные по величине изгибающие моменты M_{\max} и M_{\min} и вычисляются их значения. Там, где в сечении начинается или кончается распределённая нагрузка (если в этом сечении не приложена сосредоточенная сила), эпюра изгибающих моментов не имеет излома, т.е. парабола и прямая в этих точках имеют общую касательную.

5. По полученным значениям величин поперечных сил и изгибающих моментов в рассмотренных сечениях строятся эпюры. При этом положительные значения Q откладываются вверх, положительные моменты M – вниз (в сторону растянутых волокон).

В. Подбор сечения балок из условия прочности.

Расчет балок на прочность при изгибе производится по наибольшим нормальным напряжениям, которые возникают в опасном поперечном сечении балки. Опасным будет являться то сечение, в котором возникает больший изгибающий момент. Если сечение симметрично относительно нейтральной оси, то для расчета на прочность используется формула

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

откуда

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Здесь W_x – осевой момент сопротивления, который является геометрической характеристикой балки, работающей на изгиб. Для круглого сечения $W_x = \pi d^3 / 32$, а для прокатных профилей по величине W_x подбирается по ГОСТу соответствующий номер проката.

Пример I. Для заданной схемы балки несущей нагрузки F , M , q с защемлением (рис. 20) требуется: написать выражения для поперечных сил и изгибающих моментов каждого участка; построить эпюры Q и M и подобрать балку круглого поперечного сечения.

Дано: $F = 30$ кН; $M = 30$ кН·м; $q = 20$ кН/м; $a = 3$ м; $b = 1$ м. $[\sigma] = 1,2$ кН/см²

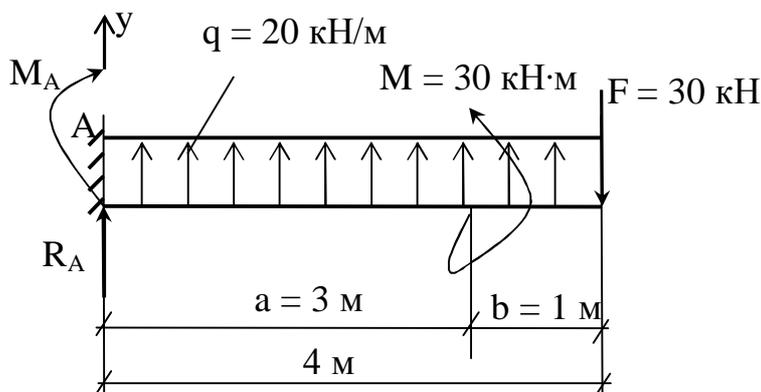


Рис. 20

Решение.

1. Определим опорную реакцию, для этого составим следующее уравнение:

$$\sum y = 0; R_A + q(a + b) - F = 0, \text{ откуда}$$

$$R_A = F - q(a + b) = 30 - 20 \cdot (3 + 1) = -50 \text{ кН.}$$

2. Определим опорный момент на опоре А. Для этого составим уравнение:

$$\sum M_A = 0;$$

$$M_A - \frac{q \cdot (a + b)^2}{2} - M + F(a + b) = 0; \text{ откуда}$$

$$M_A = \frac{q \cdot (a + b)^2}{2} + M - F \cdot (a + b) = \frac{20 \cdot (3 + 1)^2}{2} + 30 - 30(1 + 3) = 70 \text{ кН·м.}$$

3. Балку (рис. 21) разобьем на два участка и построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для каждого из них.

Участок I. Рассмотрим часть балки, лежащую справа от сечения ($0 \leq x_1 \leq 1$):

$$Q = F - qx_1 = 30 - 20x_1;$$

$$M = -Fx_1 + \frac{qx_1^2}{2} = -30x_1 + 10x_1^2.$$

Определим значения Q и M на границах участка:

– при $x_1 = 0$; $Q = 30$ кН; $M = 0$;

– при $x_2 = 1$ м; $Q = 10$ кН; $M = -20$ кН·м.

Эпюра поперечных сил – наклонная прямая, эпюра изгибающих моментов – квадратная парабола.

Участок II. ($1 \leq x_2 \leq 4$):

$$Q = F - qx_2; \tag{8}$$

$$M = -Fx_2 + \frac{qx_2^2}{2} + M. \tag{9}$$

Найдём значения Q и M на границах участка:

– при $x_2 = 1$ м; $Q_2 = 10$ кН; $M_2 = 10$ кН·м;

– при $x_2 = 4$ м; $Q_2 = -50$ кН; $M_2 = 70$ кН·м.

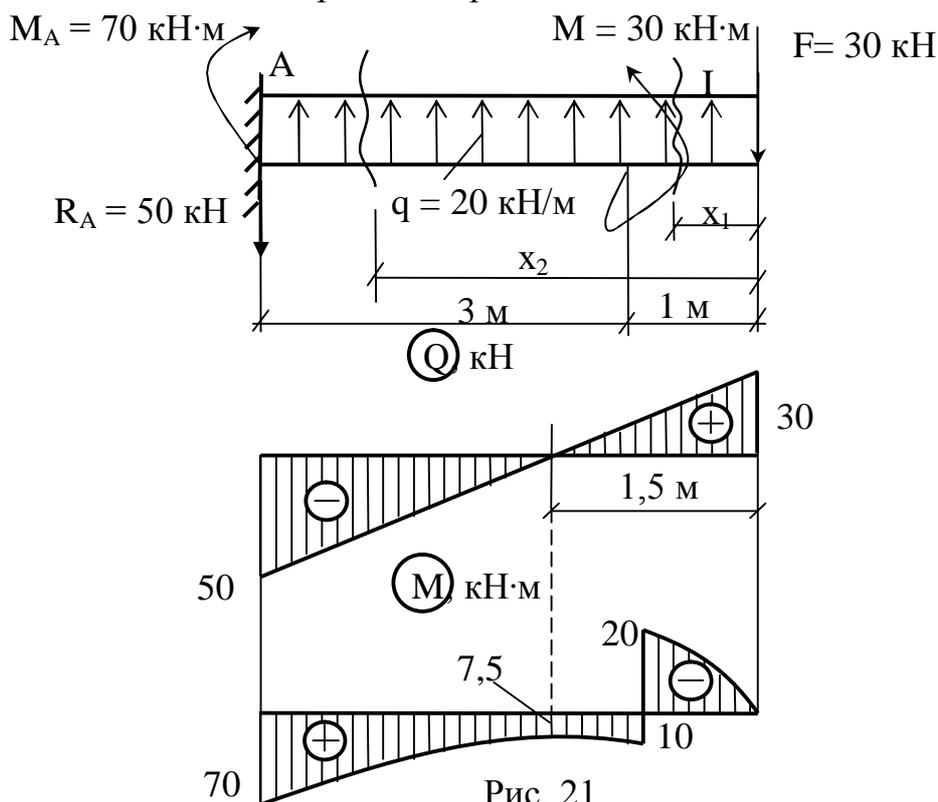
Так как поперечная сила в пределах второго участка меняет знак, то следует определить положение сечения, где она равна нулю, и вычислить в этом сечении величину изгибающего момента. Для этого уравнение (8) приравняем к нулю, отсюда найдём x_2 :

$$F - qx_2 = 0; 30 - 20 \cdot x_2 = 0; x_2 = 1,5 \text{ м.}$$

Полученное значение x_2 подставим в уравнение (9), из которого определим значение изгибающего момента:

$$M = -30 \cdot 1,5 + \frac{20 \cdot 1,5^2}{2} + 30 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По полученным значениям ординат Q и M строим эпюры и убеждаемся, что эпюра поперечных сил на этом участке – наклонная прямая, а изгибающих моментов – квадратная парабола.



Подбор сечений балки. Наибольшее напряжение возникает в крайних волокнах опасного сечения. Таковым является сечение у опоры А, где изгибающий момент имеет наибольшее значение $M_{\max} = 70 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Условие прочности запишется в виде

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

откуда

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{70 \cdot 100}{1,2} = 5833 \text{ см}^3.$$

Тогда диаметр балки

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{3,14}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5833}{3,14}} = 39,1 \text{ см.}$$

Принимаем $d=40$ см.

Пример 2. Для заданной шарнирно опертой балки с консолями (рис. 22) требуется: записать выражения Q и M для каждого участка и построить их эпюры; найти максимальный момент и подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения.

Дано: $F = 40$ кН; $M = 30$ кН·м; $q = 20$ кН/м; $a = 2$ м; $[\sigma] = 16$ кН/см².

Решение

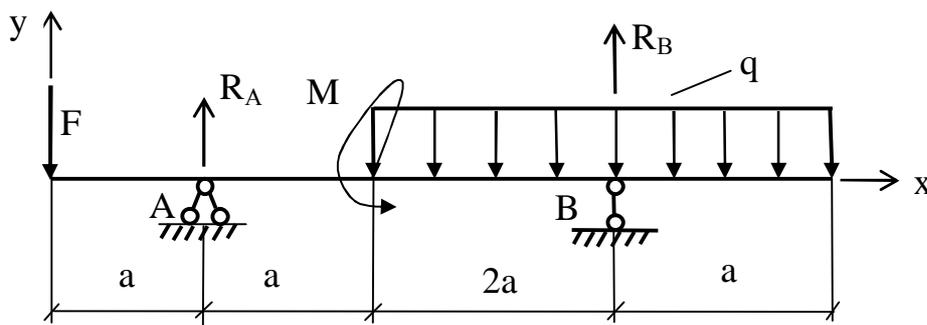


Рис. 22

Определим реакции, для чего составим уравнения суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & -Fa - M + q \cdot 3a \cdot 2,5a - R_B \cdot 3a = 0; \\ & -40 \cdot 2 - 30 + 20 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot 2 - R_B \cdot 3 \cdot 2 = 0; \end{aligned}$$

$$R_B = 81,66 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad & -F \cdot 4a - M - q \cdot 2 \cdot a \cdot a + q \cdot a \cdot 0,5a + R_A \cdot 3a = 0; \\ & -40 \cdot 4 \cdot 2 - 30 - 20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 3 \cdot 2 = 0; \end{aligned}$$

$$R_A = 78,33 \text{ кН.}$$

Используем для проверки правильности вычисления опорных реакций уравнение $\sum y = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & -F + R_A - q \cdot 3a + R_B = 0; \\ & -40 + 78,33 - 20 \cdot 3 \cdot 2 + 81,66 = 0,01 \approx 0. \end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно и по знаку, и по величине.

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. По расположению внешней нагрузки балка имеет четыре участка загрузки (рис. 23). Начало координат принимаем на левом конце балки.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$\begin{aligned} Q_1 &= -F; \quad M_1 = -Fx_1 = -40x_1; \\ \text{при } x_1 = 0 \quad Q_1 &= -40 \text{ кН}; \quad M = 0; \\ \text{при } x_1 = a = 2 \text{ м} \quad Q_1 &= -F = -40 \text{ кН}; \quad M_1 = -Fx_1 = -40 \cdot 2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Участок II ($a \leq x_2 \leq 2a$):

$$\begin{aligned} Q_2 &= -F + R_A; \\ M_2 &= -Fx_2 + R_A(x_2 - a); \\ \text{при } x_2 = a = 2 \text{ м} \quad Q_2 &= -40 + 78,33 = 38,33 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$M_2 = -40 \cdot 2 + 78,33 \cdot (2 - 2) = -80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_2 = 2a = 4 \text{ м}$ $Q_2 = -40 + 78,33 = 38,33 \text{ кН};$

$$M_2 = -40 \cdot 4 + 78,33(4 - 2) = -3,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Участок III ($2a \leq x_3 \leq 4a$):

$$Q_3 = -F + R_A - q(x_3 - 2a);$$

$$M_3 = -F_3 x_3 + R_A \cdot (x_3 - a) - q(x_3 - 2a) \frac{(x_3 - 2a)}{2} - M;$$

при $x_3 = 2a = 4 \text{ м}$ $Q_3 = -40 + 78,33 - 20 \cdot (4 - 4) = 38,33 \text{ кН};$

$$M_3 = -40 \cdot 8 + 78,33(4 - 2) - \frac{20(4 - 4)^2}{2} - 30 = -190 + 156,66 = -33,34 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_3 = 4a = 8 \text{ м}$ $Q_3 = -40 + 78,33 - 20(8 - 4) = -41,67 \text{ кН};$

$$M_3 = -40 \cdot 5 + 78,33(8 - 2) - \frac{20(8 - 4)^2}{2} - 30 = -40,02 \text{ кН} \cdot \text{м} \approx -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок IV ($4a \leq x_4 \leq 5a$):

$$Q_4 = -F + R_A - q \cdot (x_4 - 2a) + R_B;$$

$$M_4 = -F x_4 + R_A(x_4 - a) - M - \frac{q(x_4 - 2a)^2}{2} + R_B(x_4 - 4a).$$

При $x_4 = 4a = 8 \text{ м}$ $Q_4 = -40 + 78,33 - 20(8 - 4) + 81,66 = 39,99 \text{ кН};$

$$M_4 = -40 \cdot 4 \cdot 2 + 78,33(8 - 2) - 30 - \frac{20(8 - 4)^2}{2} + 81,66(8 - 8) = -40,02 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_4 = 5a = 10 \text{ м}$ $Q_4 = -40 + 78,333 + 20(10 - 4) + 81,666 = -160 + 159,999 \approx 0;$

$$M_4 = -40 \cdot 10 + 78,333(10 - 2) - 30 - \frac{20(10 - 4)^2}{2} + 81,666(10 - 8) = -790 + 789,999 \approx 0.$$

Так как поперечная сила в пределах третьего участка меняет знак, то следует определить положение сечения, где $Q = 0$ и вычислить в этом сечении величину изгибающего момента. Положение сечения определим из подобия треугольников sld и $d?k$ (см. рис. 23):

$$\frac{38,33}{41,67} = \frac{x}{4 - x}; \quad x = 1,91 \text{ м}.$$

Полученное значение x подставляем в уравнение моментов третьего участка, откуда при $x_3 = 2a + x = 2 \cdot 2 + 1,91 = 5,91 \text{ м}$ имеем:

$$M = -F x_3 + R_A(x_3 - a) - \frac{q(x_3 - 2a)^2}{2} - M = -40 \cdot 5,91 + 78,33(5,91 - 2) - \frac{20(5,91 - 4)^2}{2} - 30 = 3,79 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным ординатам построены эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рис. 23).

Подбираем сечение балки.

Наибольший изгибающий момент $M = -80 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Тогда

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 100}{16} = 500 \text{ см}^3.$$

Определяем по ГОСТ 8 239-89, что значение W_x , близкое к полученному из уравнения, у двутавра №30 ($W_x = 518 \text{ см}^3$; $J_x = 7780 \text{ см}^4$; $J_y = 436 \text{ см}^4$). Следовательно, принимаем для балки двутавр №30.

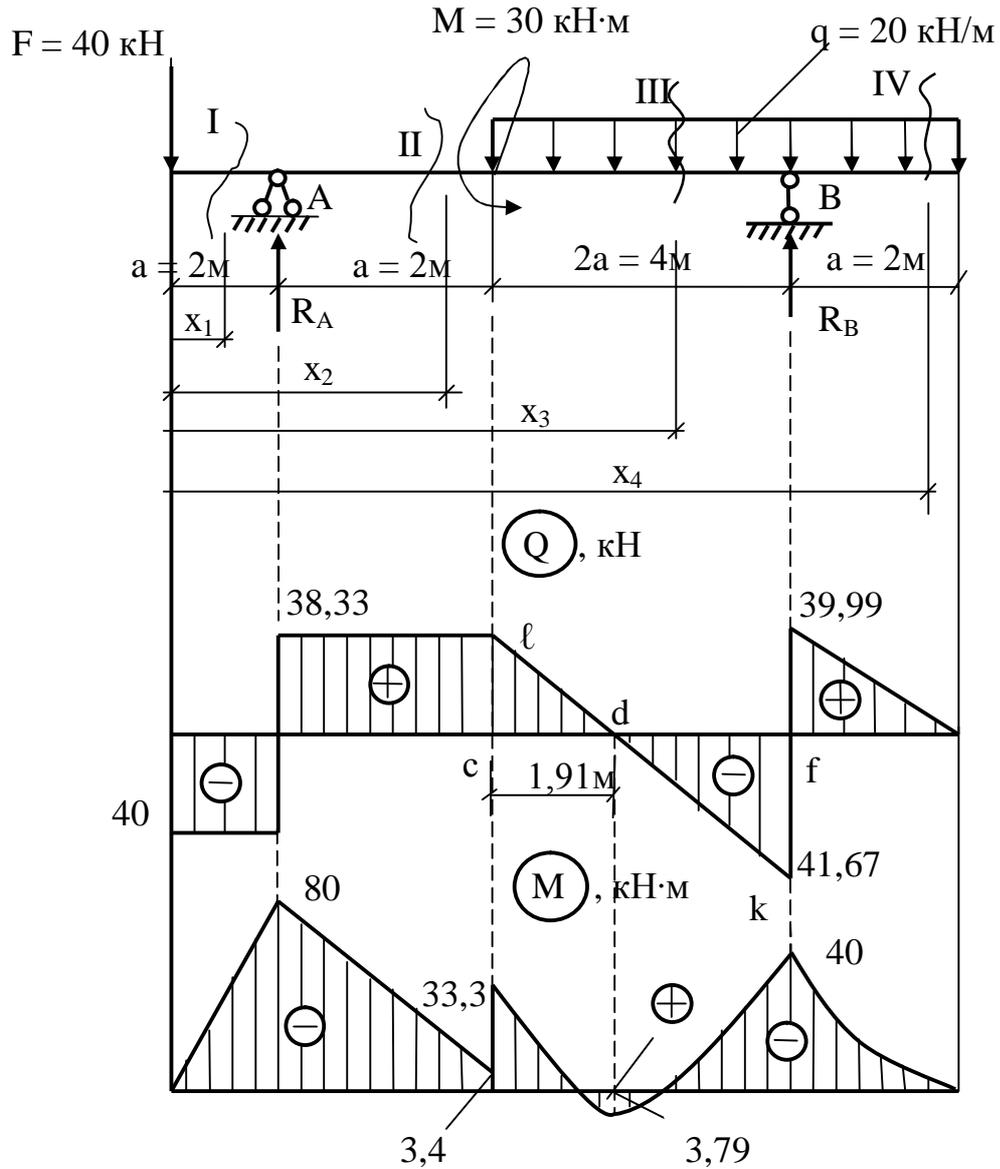


Рис. 23

Задача 6.

Определение перемещений в балках

6.1. Определение перемещений методом начальных параметров.

Метод начальных параметров позволяет записать одно уравнение углов поворота и одно – для прогибов, которые пригодны для всех участков балки. Поэтому данные уравнения называются универсальными, или обобщенными. Не вдаваясь в подробности получения уравнений, ограничимся способами

их применения. Рассмотрим произвольно нагруженную консольную балку (рис. 24).

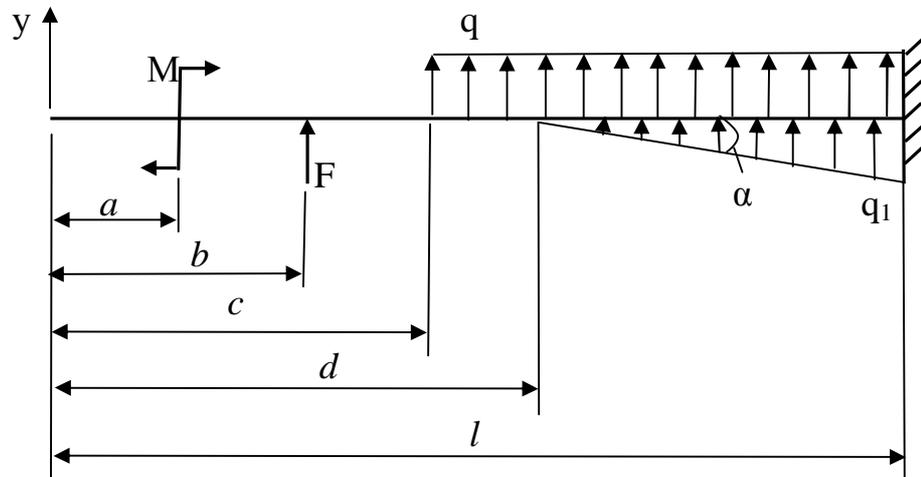


Рис. 24

Уравнение для углов поворота имеет вид:

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + \sum M(x-a) + \sum \frac{F(x-b)^2}{2} + \sum \frac{q(x-c)^3}{6} + \sum \frac{\operatorname{tg}\alpha(x-d)^4}{24}; \quad (10)$$

уравнение для прогибов

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \sum \frac{F(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q(x-c)^4}{24} + \sum \frac{\operatorname{tg}\alpha(x-d)^5}{120}, \quad (11)$$

где θ_0 и v_0 – угол поворота и прогиб в начале координат, определяемые из условия опирания балки;

a, b, c, d – расстояния от начало координат соответственно до момента, сосредоточенной силы, до начала равномерно распределенной нагрузки и до начала неравномерно распределенной нагрузки;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{q_1}{l-d}$ – тангенс угла наклона неравномерно распределенной нагрузки;

M, F, q, q_1 – момент, сосредоточенная сила (включая реакции опор), равномерно распределенная нагрузка и неравномерно распределенная нагрузка, расположенные между началом координат и рассматриваемым сечением балки на расстоянии x ; знаки суммы включены из-за возможности повторения одностипных нагрузок.

При расчетах необходимо учитывать следующее.

1. Если какая-либо нагрузка имеет иное направление, чем принято на рис. 24, то ее надо включить в формулы (10) и (11) со знаком минус.

2. Если распределенная нагрузка не доходит до рассматриваемого сечения, то ее надо продолжить до этого сечения, одновременно приложив на свободном участке такую же нагрузку с противоположным направлением (рис. 25). В этом случае следует в уравнения (10) и (11) включить распределенные нагрузки в таком виде:

а) в случае равномерно распределенной нагрузки

$$EJ\theta = \dots + \frac{q(x-c)^3}{6} - \frac{q(x-\kappa)^3}{6}; \quad (12)$$

$$EJv = \dots + \frac{q(x-c)^4}{24} - \frac{q(x-\kappa)^4}{24}. \quad (13)$$

б) в случае неравномерно распределенной нагрузки

$$EJ\theta = \dots + \frac{\text{tg}\alpha(x-d)^4}{24} - \frac{\text{tg}\alpha(x-f)^4}{24} - \frac{q_1(x-f)^3}{6}; \quad (14)$$

$$EJv = \dots + \frac{\text{tg}\alpha(x-d)^5}{120} - \frac{\text{tg}\alpha(x-f)^5}{120} - \frac{q_1(x-f)^4}{24}. \quad (15)$$

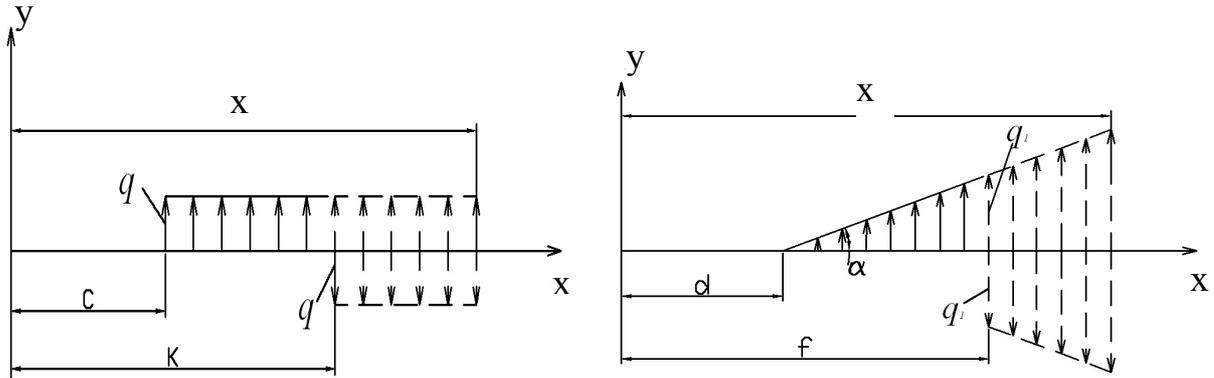


Рис. 25

Пример 1. Для балки (рис. 26) построить эпюры углов поворота и прогибов.

Решение. Найдем вначале опорные реакции. Из условия равновесия имеем

$$\sum M_B = 0, \quad R_a l - q \frac{l}{2} - \frac{3}{4} l = 0,$$

откуда $R_a = \frac{3}{8} ql$. Из уравнения $\sum y = 0$ получаем $R_b = \frac{ql}{2} - \frac{3}{8} ql = \frac{1}{8} ql$.

Воспользуемся уравнениями (10), (11). Найдем начальные параметры θ_0 и v_0 . Для этого примем следующие условия:

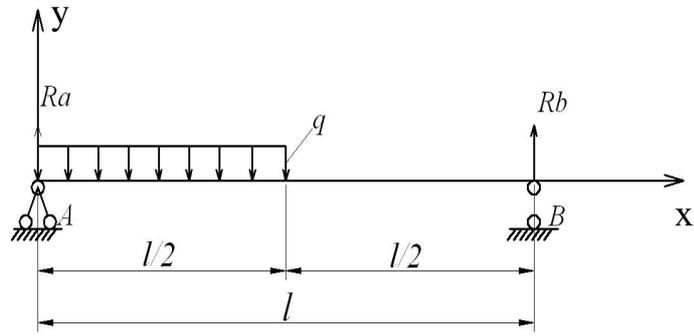
а) при $x = 0$ прогиба не будет, то есть $v = 0$;

б) при $x = l$ прогиб также отсутствует ($v = 0$).

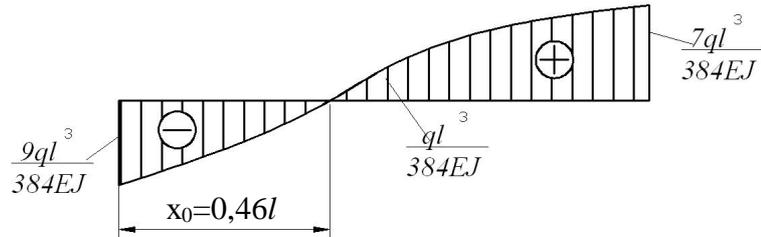
Подставим условие (а) в уравнение (11). Получим $v_0 = 0$. Подставим условие (б) в уравнение (11) с учетом выражения (13). При этом включим только те нагрузки, которые действуют на балку. Будем иметь

$$0 = EJ\theta_0 l + \frac{3}{8} ql(l-0)^3 - \frac{q(l-0)^4}{24} + \frac{q(l-\frac{l}{2})^4}{24},$$

откуда
$$EJ\theta_0 = -\frac{9ql^3}{384}.$$



Эпюра θ



Эпюра v

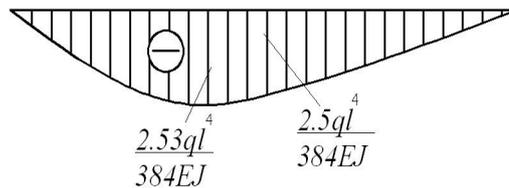


Рис. 26

Подставив значения полученных параметров в уравнения (10) и (11), будем иметь следующие выражения.

Для левой половины балки

$$EJ\theta = -\frac{9ql^3}{384} + \frac{3}{8}ql(x-0)^2 - \frac{q(x-0)^3}{6}, \quad (16)$$

$$EJv = -\frac{9ql^3}{384}x + \frac{3}{8}ql(x-0)^3 - \frac{q(x-0)^4}{24}. \quad (17)$$

Для правой половины запишем с учетом выражений (12) и (13):

$$EJ\theta = -\frac{9ql^3}{384} + \frac{3}{8}ql(x-0)^2 - \frac{q(x-0)^3}{6} + \frac{q(x-\frac{l}{2})^3}{6}, \quad (18)$$

$$EJv = -\frac{9ql^3}{384}x + \frac{3}{8}ql(x-0)^3 - \frac{q(x-0)^4}{24} + \frac{q(x-\frac{l}{2})^4}{24}. \quad (19)$$

При $x = 0$ из выражений (16) и (17) получаем

$$\theta = -\frac{9ql^3}{384EJ}, \quad v = 0.$$

При $x = \frac{l}{2}$ выражения (16) и (17) или же (18) и (19) дают

$$\theta = \frac{ql^3}{384EJ}, \quad v = -\frac{2,5ql^4}{384EJ}.$$

При $x = l$ формулы (18) и (19) приводят к результатам

$$\theta = \frac{7ql^3}{384EJ}, \quad v = 0.$$

Известно, что в тех сечениях, где угол поворота равен нулю, прогиб будет иметь экстремальное значение. Приравняем правую часть выражения (16) к нулю:

$$-\frac{9ql^3}{384} + \frac{\frac{3}{8}ql(x-0)^2}{2} - \frac{q(x-0)^3}{6} = 0,$$

откуда $x = 0,46l$. Приняв в формуле (17) $x = 0,46l$, получаем:

$$v = -\frac{2,53ql^4}{384EJ}.$$

Следует отметить, что прогиб посередине пролета незначительно отличается от максимального (расхождение 1,2 %). Установлено, что в шарнирно-опертой по двум концам балки без консолей при нагрузках, вызывающих однозначные прогибы, максимальный прогиб мало отличается от прогиба посередине пролета.

Пример 2. Для балки (рис. 27), нагруженной распределенной нагрузкой q и моментом M , требуется: 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от расчетных нагрузок, считая, что заданная распределенная нормативная нагрузка является постоянной, а заданный нормативный момент – временным; 2) от расчетных нагрузок подобрать сечение балки из стального двутавра, с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа; 3) пользуясь методом начальных параметров, вычислить деформации балки и построить эпюры прогибов и углов поворота от нормативной нагрузки, если модуль упругости материала балки $E = 210$ ГПа.

Исходные данные: общая длина балки 8,2 м, нормативная распределенная нагрузка $q = 12$ кН/м, нормативный момент $M = 35$ кН·м. Коэффициент перегрузки для постоянной нагрузки $k = 1,1$, для временной $k = 1,4$.

Примечание. В соответствии со СНиП с 1956 года расчеты строительных конструкций осуществляются не по допускаемым напряжениям, а по расчетным сопротивлениям R . Исходя из этих соображений, данный пример представлен в таком варианте.

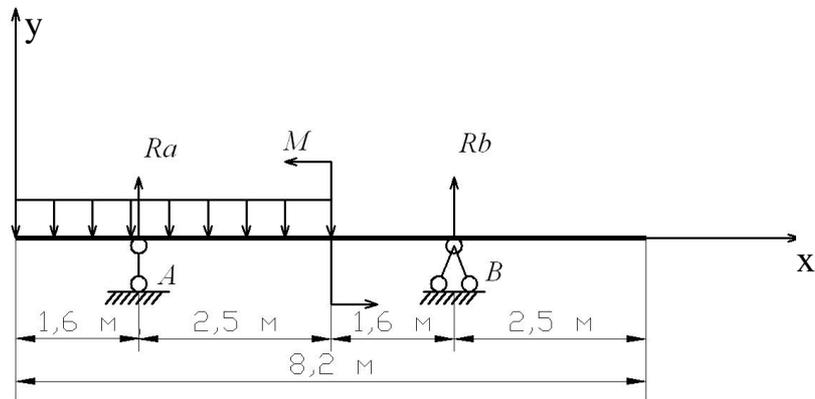


Рис. 27

Р е ш е н и е. Вычислим расчетные нагрузки.

$$q = 12 \cdot k = 12 \cdot 1,1 = 13,2 \text{ кН/м}, \quad M = 35 \cdot 1,4 = 49 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

1. Определим опорные реакции:

$$\sum y = 0; \quad -q(1,6+2,5) + R_a + R_b = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M + R_a(1,6 + 2,5) - q(1,6 + 2,5)\left(\frac{1,6 + 2,5}{2} + 1,6\right) = 0;$$

$$R_a = \frac{49 + 13,2(1,6 + 2,5)/\left(\frac{1,6 + 2,5}{2} + 1,6\right)}{1,6 + 2,5} = 60,13 \text{ кН},$$

$$R_b = q(1,6 + 2,5) - R_a = 13,2(1,6 + 2,5) - 60,13 = -6,01 \text{ кН}.$$

2. Построим эпюры Q и M от расчётных нагрузок.

Участок 1 ($0 \leq x_1 \leq 1,6\text{м}$) (рис. 28)

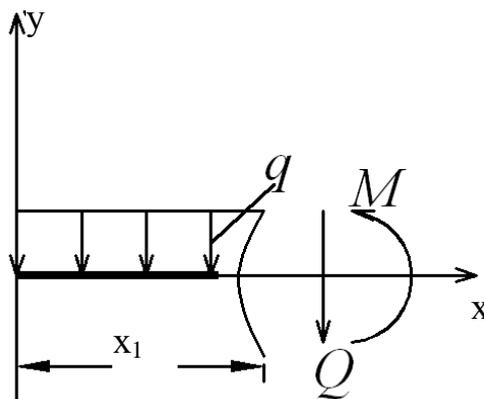


Рис. 28

$$-Q - qx_1 = 0; \quad Q = -qx_1 = -13,2x_1$$

$$\text{При } x_1 = 0; \quad Q_1 = 0.$$

$$\text{При } x_1 = 1,6 \text{ м}; \quad Q_1 = -13,2 \cdot 1,6 = -21,12 \text{ кН};$$

$$-M_1 - q \frac{x^2}{2} = 0; \quad M_1 = -\frac{qx_1^2}{2}.$$

При $x_1 = 0$; $M_1 = 0$.

$$\text{При } x_1 = 1,6 \text{ м; } M_1 = \frac{-13,2 \cdot 1,6^2}{2} = -16,896 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{При } x_1 = 0,8 \text{ м; } M_1 = \frac{-13,2 \cdot 0,8^2}{2} = -4,224 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Полученные значения Q и M отложены на эпюрах (рис. 32), изображенных ниже после расчета всех участков.

Участок 2 (рис. 29) ($1,6 \leq x_2 \leq 4,1$ м)

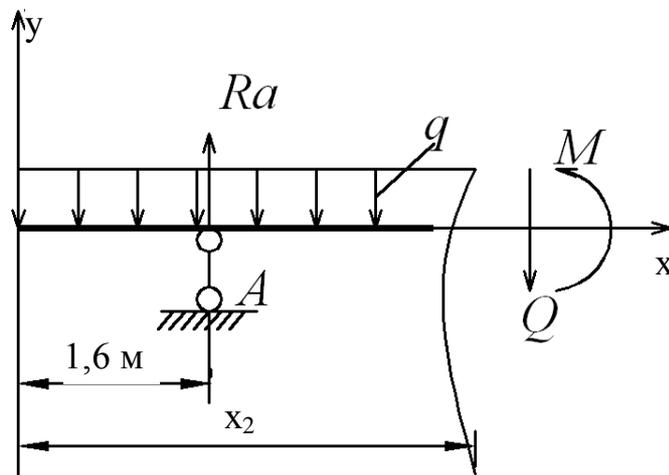


Рис. 29

$$-Q_2 - qx_2 + Ra = 0;$$

$$Q_2 = -qx_2 + Ra = -13,2 \cdot x_2 + 60,13;$$

$$-M_2 + Ra(x_2 - 1,6) - \frac{qx_2^2}{2} = 0;$$

$$M_2 = Ra(x_2 - 1,6) - \frac{qx_2^2}{2};$$

$$M_2 = 60,13(x_2 - 1,6) - \frac{13,2x_2^2}{2}.$$

$$\text{При } x_2 = 1,6 \text{ м; } Q_2 = -13,2 \cdot 1,6 + 60,13 = 39,01 \text{ кН};$$

$$M_2 = 60,13(1,6 - 1,6) - \frac{13,2 \cdot 1,6^2}{2} = -16,896 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x_2 = 4,1 \text{ м; } Q_2 = -13,2 \cdot 4,1 + 60,13 = 6,01 \text{ кН};$$

$$M_2 = 60,13(4,1 - 1,6) - \frac{13,2 \cdot 4,1^2}{2} = 39,379 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 3 (рис. 30) ($4,1 \leq x_3 \leq 5,7 \text{ м}$)

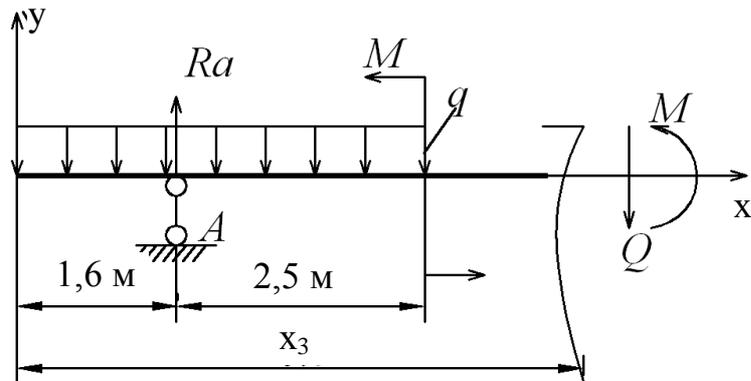


Рис. 30

$$Q_3 = 6,01 \text{ кН}; \quad Q_3 = \text{const};$$

$$-M_3 - M + Ra(x_3 - 1,6) - q(1,6 + 2,5)(x_3 - \frac{(1,6 + 2,5)}{2}) = 0;$$

$$M_3 = -49 + 60,13(x_3 - 1,6) - 13,2 \cdot 4,1(x_3 - 2,05).$$

При $x_3 = 4,1 \text{ м}; \quad M_3 = -49 + 60,13 \cdot 2,5 - 13,2 \cdot 4,1(4,1 - 2,05) = -9,62 \text{ кН} \cdot \text{м};$

При $x_3 = 5,7 \text{ м}; \quad M_3 = -49 + 60,13(5,7 - 1,6) - 13,2 \cdot 4,1(5,7 - 2,05) = 0.$

Участок 4 (рис. 31) ($0 \leq x_4 \leq 2,5 \text{ м}$)

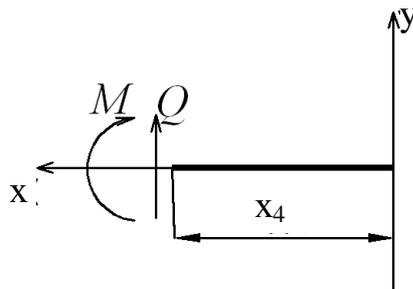


Рис. 31

$Q = 0 = \text{const}; \quad M = 0$ – на участке нагрузки не действуют.

Подбираем сечения балки из стального двутавра. Из условия прочности

$$\frac{M_{\max}}{W_x} \leq R; \quad R = 21 \text{ кН/см}^2;$$

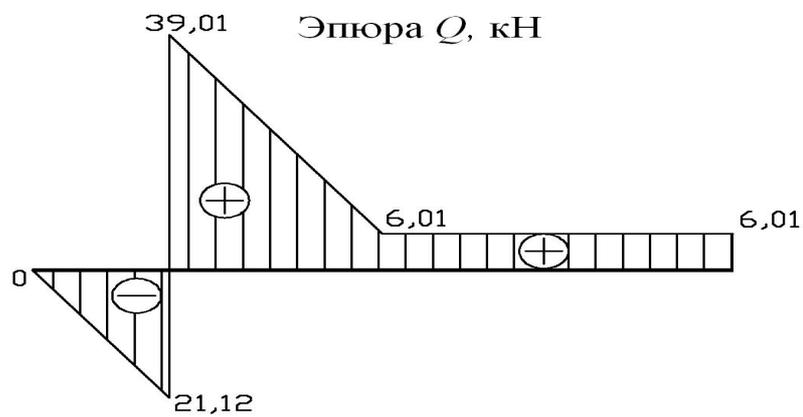
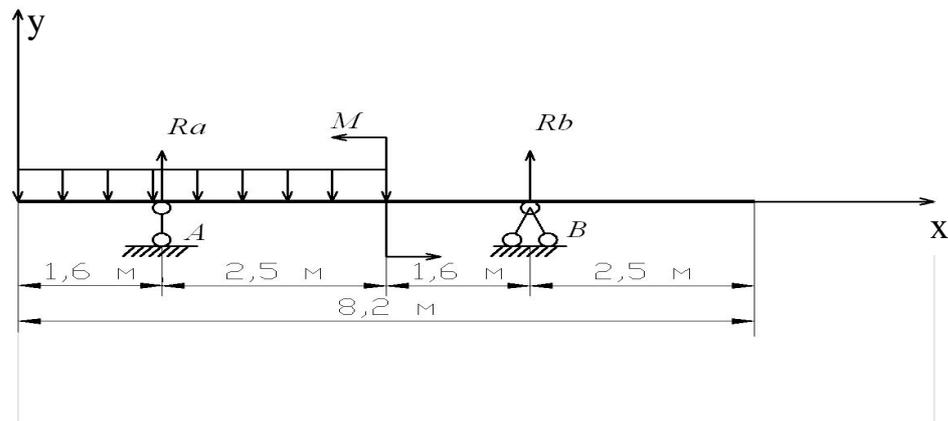
$$M_{\max} = 39,38 \text{ кН} \cdot \text{м} = 3938 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$W_x \geq \frac{3938}{21} = 187,47 \text{ см}^3.$$

Примем двутавр № 22 с моментом сопротивления $W_x = 232 > 187,47 \text{ см}^3$.
 Для подобранной балки имеем:

$$W_x = 232 \text{ см}^3;$$

$$J_x = 2550 \text{ см}^4.$$



Эпюра M , кНм

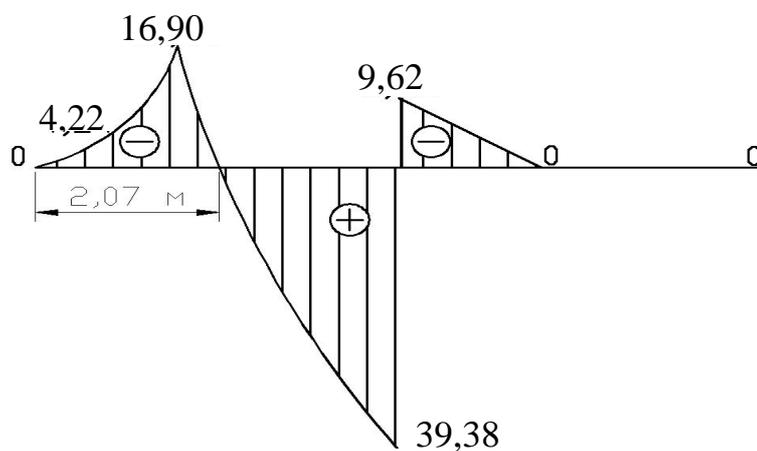


Рис. 32

Построим эпюры прогибов и углов поворота от нормативных нагрузок.

Найдем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad Ra + Rb - q(1,6 + 2,5) &= 0; \\ \sum M_B = 0; \quad Ra(1,6 + 2,5) - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^2}{2} + \frac{q1,6^2}{2} - M &= 0; \\ Ra = \frac{35 + \frac{12(2 \cdot 1,6 + 2,5)^2}{2} - \frac{12 \cdot 1,6^2}{2}}{1,6 + 2,5} &= 52,33 \text{ кН}; \\ Rb = q(1,6 + 2,5) - Ra = 12 \cdot 4,1 - 52,33 &= -3,13 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (11). Запишем обобщенное уравнение упругой линии балки:

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \sum \frac{p(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q(x-c)^4}{24}.$$

Найдем угол поворота и прогиба в начале координат согласно обобщенному уравнению. Так как при $x=1,6$ м и $x=5,7$ м $v=0$, запишем

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= EJv_0 + EJ\theta_0 1,6 - \frac{q1,6^4}{24}; \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= EJv_0 + EJ\theta_0(2 \cdot 1,6 + 2,5) - \frac{M1,6^2}{2} + \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} + \frac{q1,6^4}{24}. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Из уравнения (20)
$$EJv_0 = \frac{q1,6^4}{24} - EJ\theta_0 1,6. \quad (22)$$

Подставим это выражение в уравнение (21).

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{q1,6^4}{24} - EJ\theta_0 1,6 + EJ\theta_0'(2 \cdot 1,6 + 2,5) - \frac{M1,6^2}{2} + \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} + \frac{q1,6^4}{24}; \\ 0 &= \frac{2q1,6^4}{24} + EJ\theta_0 4,1 - \frac{M1,6^2}{2} + \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24}; \\ EJ\theta_0(4,1) &= \frac{M1,6^2}{2} + \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} - \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q1,6^4}{12}; \\ \theta_0 &= \frac{\frac{M1,6^2}{2} + \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} - \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q1,6^4}{12}}{EJ(4,1)}; \\ \theta_0 &= \frac{\frac{35 \cdot 1,6^2}{2} + \frac{12(3,2 + 2,5)^4}{24} - \frac{52,33(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{12 \cdot 1,6^4}{12}}{5 \, 355 \cdot (1,6 + 2,5)} = -0,001 \, 596 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Из выражения (22) имеем
$$v_0 = \frac{\frac{q1,6^4}{24} - EJ\theta_0 1,6}{EJ};$$

$$v_0 = \frac{\frac{12 \cdot 1,6^4}{24} - 5355(-0,001596) \cdot 1,6}{5355} = 0,003166 \text{ м.}$$

По формулам (10) и (11) найдем угол поворота и прогиб в некоторых сечениях и построим их эпюры (рис. 33).

Участок 1 ($0 \leq x \leq 1,6 \text{ м}$)

$$EJv = EJ\theta_0 x + EJv_0 - \frac{qx^4}{24};$$

$$EJ\theta = EJ\theta_0 - \frac{qx^3}{6};$$

$$v = \theta_0 x + v_0 - \frac{qx^4}{24EJ}; \quad \theta = \theta_0 - \frac{qx^3}{6EJ}.$$

При $x = 0,8 \text{ м}$

$$v = -0,001596 \cdot 0,8 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 0,8^4}{24 \cdot 5355} = 0,0018509 \text{ м} = 0,185 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 0,8^3}{6 \cdot 5355} = -0,0017872 \text{ рад.}$$

При $x = 1,6 \text{ м}$

$$v = -0,001596 \cdot 1,6 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 1,6^4}{24 \cdot 5355} = 0 \text{ м};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 1,6^3}{6 \cdot 5355} = -0,003125 \text{ рад};$$

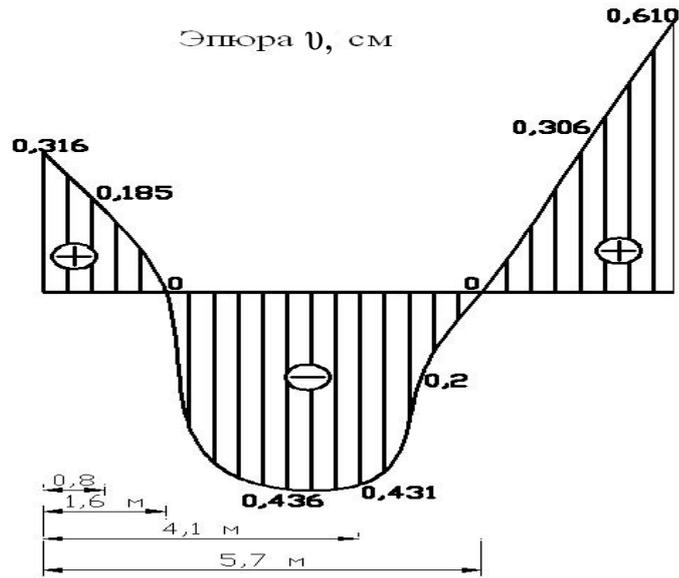
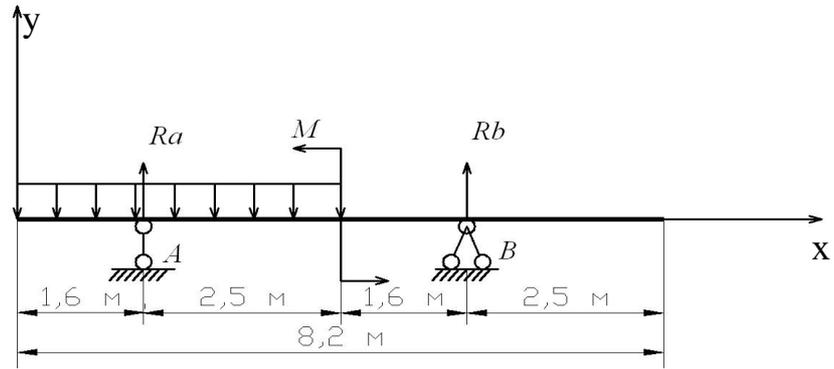
Участок 2 ($1,6 \leq x_2 \leq 4,1 \text{ м}$)

$$EJv = EJ\theta_0 x + EJv_0 - \frac{qx^4}{24} + R_A \frac{(x-1,6)^3}{6};$$

$$EJ\theta = EJ\theta_0 - \frac{qx^3}{6} + \frac{R_A(x-1,6)^2}{2};$$

$$v = \theta_0 x + v_0 - \frac{qx^4}{24EJ} + \frac{R_A(x-1,6)^3}{6EJ};$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{qx^3}{6EJ} + \frac{R_A(x-1,6)^2}{2EJ}.$$



Эпюра θ , рад

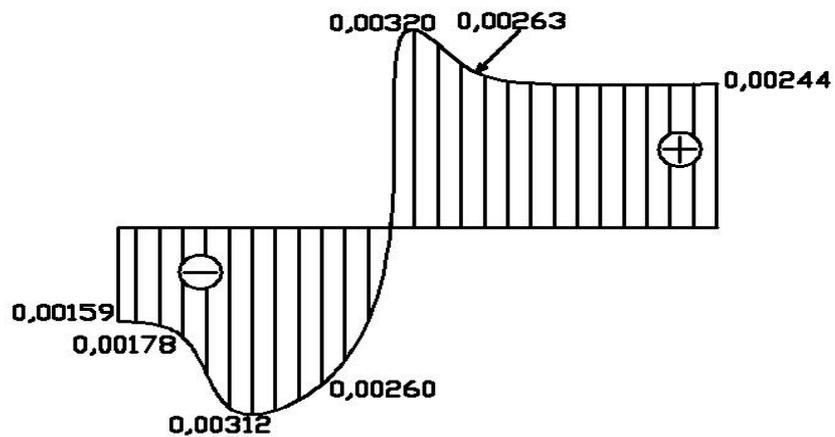


Рис. 33

При $x = 2,85$ м

$$v = -0,001596 \cdot 2,85 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 2,85^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(2,85 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} = -0,00436 \text{ м} = -0,436 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 2,85^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(2,85 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} = -0,002607 \text{ рад.}$$

При $x = 4,1$ м

$$v = -0,001596 \cdot 4,1 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 4,1^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,1 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} = -0,00431 \text{ м} = 0,431 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 4,1^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,1 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} = 0,0032 \text{ рад.}$$

Участок 3 ($4,1 \leq x_3 \leq 5,7$ м)

$$v = \theta_0 x + v_0 - \frac{qx^4}{24EJ} + \frac{q(x - 1,6 - 2,5)^4}{24EJ} + \frac{R_A(x - 1,6)^3}{6EJ} - \frac{M(x - 1,6 - 2,5)^2}{2EJ};$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{qx^3}{6EJ} + \frac{q(x - 1,6 - 2,5)^3}{6EJ} + \frac{R_A(x - 1,6)^2}{2EJ} - \frac{M(x - 1,6 - 2,5)}{EJ}.$$

При $x = 4,9$ м

$$v = -0,001596 \cdot 4,9 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 4,9^4}{24 \cdot 5355} + \frac{12(4,9 - 1,6 - 2,5)^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,9 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} -$$

$$- \frac{35(4,9 - 1,6 - 2,5)^2}{2 \cdot 5355} = -0,0020 \text{ м} = -0,2 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 4,9^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12(4,9 - 1,6 - 2,5)^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,9 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} -$$

$$- \frac{35(4,9 - 1,6 - 2,5)}{5355} = 0,00263 \text{ рад.}$$

При $x = 5,7$ м

$$v = 0;$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 5,7^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12 \cdot 1,6^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33 \cdot 4,1^2}{2 \cdot 5355} - \frac{35 \cdot 1,6}{5355} = 0,00244 \text{ рад.}$$

Участок 4 ($5,7 \leq x \leq 8,2$ м)

При $x = 6,95$ м

$$v = -0,001596 \cdot 6,95 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 6,95^4}{24 \cdot 5355} + \frac{12(6,95 - 1,6 - 2,5)^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(6,95 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} -$$

$$- \frac{35(6,95 - 1,6 - 2,5)^3}{6 \cdot 5355} = 0,00306 \text{ м} = 0,306 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 6,95^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12(6,95 - 4,1)^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(6,95 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} - \frac{32(6,95 - 4,1)}{5355} +$$

$$+ \frac{(-3,13) \cdot (6,95 - 3,2 - 2,5)^2}{2 \cdot 5355} = 0,00244 \text{ рад.}$$

При $x = 8,2$ м

$$v = -0,001596 \cdot 8,2 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 8,2^4}{24 \cdot 5355} + \frac{12(8,2 - 4,1)^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(8,2 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} -$$

$$- \frac{35(8,2 - 4,1)^2}{2 \cdot 5355} + \frac{(-3,13) \cdot (8,2 - 3,2 - 2,5)^3}{6 \cdot 5355} = 0,0061 \text{ м} = 0,61 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 8,2^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12(8,2 - 4,1)^3}{6 \cdot 5355} - \frac{52,33(8,2 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} - \frac{32(8,2 - 4,1)}{5355} +$$

$$+ \frac{(-3,13) \cdot (8,2 - 5,7)^2}{2 \cdot 5355} = 0,00243 \text{ рад.}$$

6.2. Определение перемещений методом Мора и по правилу Верещагина

Интеграл Мора

Иногда интересует не вся упругая линия балки, а только ее перемещение в каком-либо сечении. В этом случае удобно использовать метод Мора. Не загромождая подробными выкладками настоящую работу, изложим суть метода расчета в элементарном варианте (рис. 34).

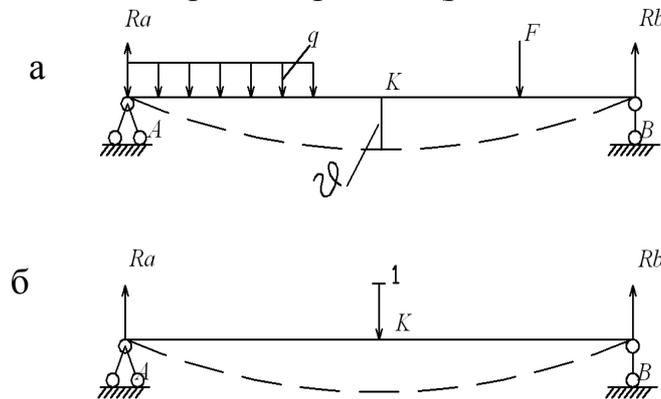


Рис. 34

Балка, представленная на рис. 34 а, изгибается от приложенной нагрузки. Требуется определить прогиб v в сечении k . Возьмем такую же балку и приложим к ней силу, равную 1 (единичную силу) в том же сечении k (рис.34 б). Затем сообщим ей дополнительные совершенно такие же прогибы, какие имеет первая балка. Дополнительная потенциальная энергия U , накопленная вследствие этого, будет равна работе единичной силы на искомом перемещении v , то есть

$$U = 1 \cdot v. \quad (23)$$

Эту дополнительную энергию можно получить и другим способом. Из механики известно, что работа пары сил (момента) равняется моменту, умноженному на угол поворота. Мысленно вырежем из второй балки бесконечно малый элемент длиной dx (рис. 35).

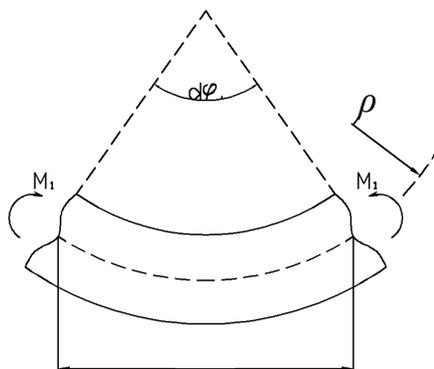


Рис. 35

Потенциальная энергия для этого участка будет

$$dU = M_1 d\varphi, \quad (24)$$

где M_1 – изгибающий момент, действующий на малый элемент от единичной силы; $d\varphi$ – угол поворота поперечных сечений, вызванный моментом M от нагрузки, действующей на первую балку, так как второй балке после нагружения единичной силой были сообщены прогибы первой балки.

Из рис. 35 имеем

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}.$$

Из курса сопротивления материалов известно, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}.$$

Тогда

$$d\varphi = \frac{M dx}{EJ}.$$

Подставив значение $d\varphi$ в выражение (24), получаем:

$$dU = M_1 \frac{M dx}{EJ}.$$

Потенциальная энергия всей балки, нагруженной единичной силой, будет

$$U = \int_0^l M_1 \frac{M dx}{EJ}. \quad (25)$$

Из сравнения выражений (23) и (25), будем иметь

$$\boxed{v = \int_0^l \frac{MM_1}{EJ} dx,} \quad (26)$$

где M – изгибающий момент от заданной нагрузки; M_1 – изгибающий момент от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения.

Формула (26) называется интегралом Мора. Если требуется найти угловое перемещение какого-либо сечения (угол поворота), то по его направлению следует приложить единичный момент. Тогда по формуле (26) получим θ .

Пример 3. Определить прогиб и угол поворота среднего сечения консоли, нагруженной сосредоточенной силой на конце (рис. 36).

Решение

Определение прогиба. Изгибающий момент от заданной нагрузки $M = -Fx$ (рис. 36 а). Приложим в среднем сечении балки единичную силу (рис. 36 б) и составим уравнения изгибающих моментов от силы, равной 1. На левом участке $M_1 = 0$. На правом участке имеем

$$M_1 = -1(x - l/2) = l/2 - x.$$

Применим формулу (26). Интеграл запишем дважды, так как имеем два участка:

$$v = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{MM_1}{EJ} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{MM_1}{EJ} dx.$$

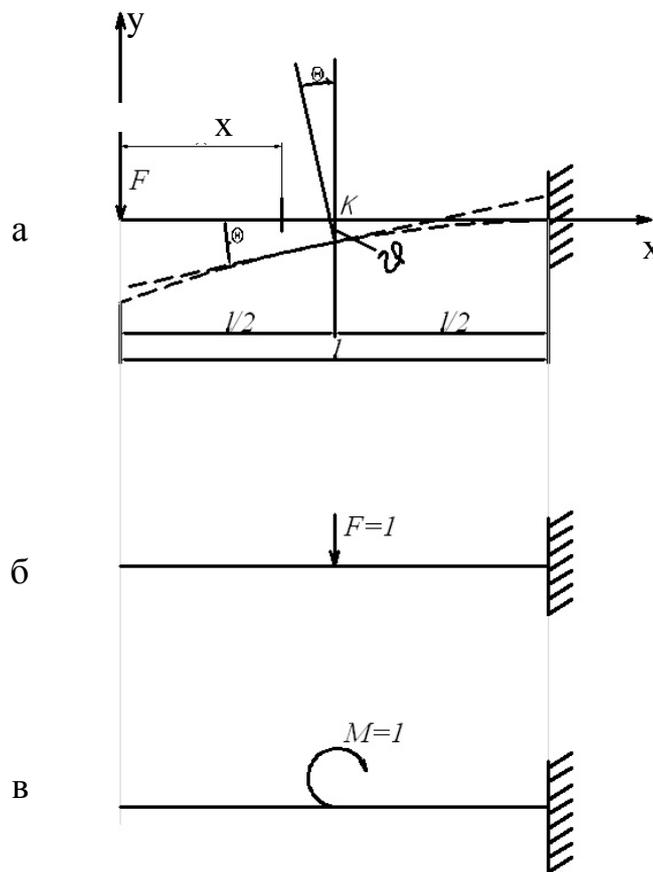


Рис. 36

Подставив соответствующие значения, получаем:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{EJ} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} (-Fx) \cdot 0 dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (-Fx) \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \right] = -\frac{F}{EJ} \int_{\frac{l}{2}}^l x \left(\frac{l}{2} - x \right) dx = \\ &= -\frac{F}{EJ} \left(\frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{l}{2}}^l = -\frac{F}{EJ} \left(\frac{l^3}{4} - \frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{16} + \frac{l^3}{24} \right) = -\frac{5 Fl^3}{48 EJ}. \end{aligned}$$

Результат получили со знаком минус. Это свидетельствует о том, что сечение перемещается вниз.

Определение угла поворота. Вместо силы в рассматриваемом сечении приложим единичный момент (рис. 36 в). Тогда на левом участке $M_1 = 0$, на правом $M_1 = 1$.

Учитывая, что определяем прогиб, поменяем в формуле (26) обозначение прогиба на угол поворота и воспользуемся этой же формулой.

$$\theta = \frac{1}{EJ} \int_{\frac{l}{2}}^l (-Fx) dx = -\frac{F}{EJ} \int_{\frac{l}{2}}^l x dx = -\frac{Fx^2}{2EJ} \Big|_{\frac{l}{2}}^l = -\frac{F}{2EJ} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) = -\frac{3Fl^2}{8EJ}.$$

Знак минус указывает на то, что поворот происходит в сторону, противоположную направлению единичного момента, то есть против хода часовой стрелки.

Правило Верещагина

Техника определения перемещений значительно упрощается благодаря применению специального графического приема вычисления интеграла Мора. Заметим, что в прямолинейном стержне эпюра моментов от единичной силы всегда будет состоять из прямолинейных участков. Пусть на участке АВ стержня эпюра M_1 прямолинейна, а вторая эпюра M может иметь любое очертание (рис. 37).

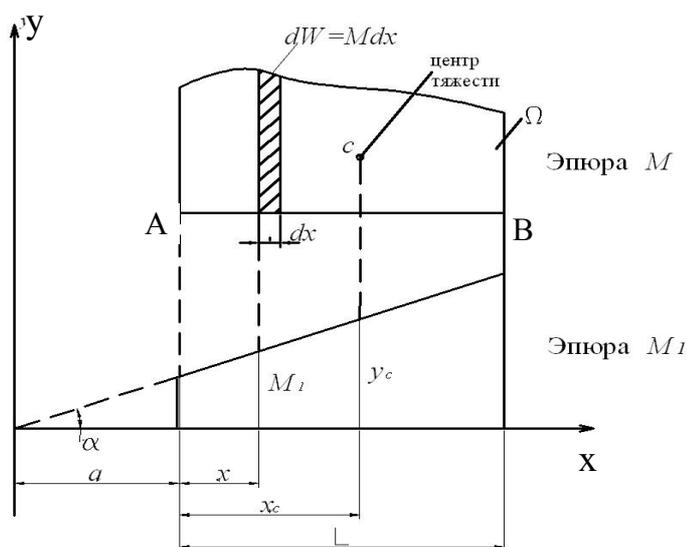


Рис. 37

Для прямолинейной эпюры можно записать:

$$M_1 = (x + a) \operatorname{tg} \alpha.$$

Если жесткость балки постоянная, выражение $\int_0^l MM_1 dx$ примет вид:

$$\int_0^l MM_1 dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) M dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) d\Omega,$$

где $Mdx = d\Omega$ – дифференциал площади Ω эпюры M (см. рис. 37).

Интеграл $\int_0^l (x+a)d\Omega$ – представляет собой статический момент площади

Ω эпюры M относительно оси y (см. рис. 37), который можно записать в виде

$$\int_0^l (x+a)d\Omega = \Omega(x_c + a),$$

где x_c – абсцисса центра тяжести площади Ω эпюры M . После этого интегральное выражение можно представить в следующем виде:

$$\int_0^l MM_1 dx = (x_c+a) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \Omega.$$

Поскольку $(x_c+a) \operatorname{tg} \alpha = y_c$, будем иметь

$$\int_0^l MM_1 dx = \Omega \cdot y_c.$$

Левая часть полученного равенства отличается от интеграла Мора отсутствием жесткости поперечного сечения, поэтому для определения перемещения (прогиба) следует последнее выражение разделить на EJ . После этого вместо формулы (26) получим математическое выражение правила Верещагина:

$$\nu = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ}. \quad (27)$$

Итак, для определения перемещения следует умножить площадь одной из эпюр Ω на ординату y_c другой (прямолинейной) эпюры, взятой под центром тяжести площади первой эпюры, и полученный результат разделить на жесткость. Если потребуется найти угол поворота, то в качестве единичной нагрузки принимается единичный момент. Тогда вместо ν получим по формуле (27) угол поворота θ . Следует отметить, что если обе эпюры изгибающих моментов прямолинейные, то можно площадь взять из эпюры от единичной нагрузки, а ординату – из эпюры от заданной нагрузки (см. пример 7). Если очертание грузовой эпюры имеет сложный вид (например, параболической трапеции), то эпюру разбивают на два треугольника и параболический сегмент, площадь которого Ω_2 всегда равна $ql^3/12$, а положение центра тяжести – в середине рассматриваемого участка (рис. 38).

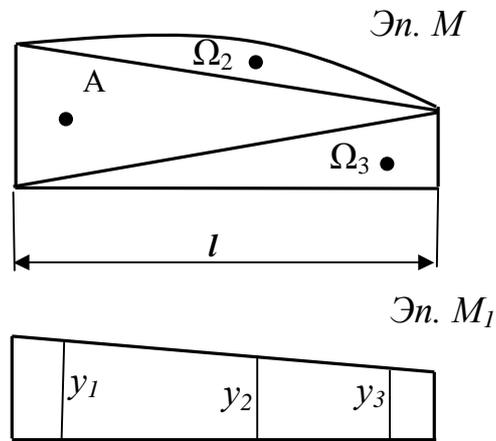


Рис. 38

Для облегчения расчета в приложении 1 представлены площади некоторых фигур и расстояния до центров тяжести.

Пример 4. Определить прогиб и угол поворота в середине длины балки, нагруженной в свободном конце силой F (рис. 39).

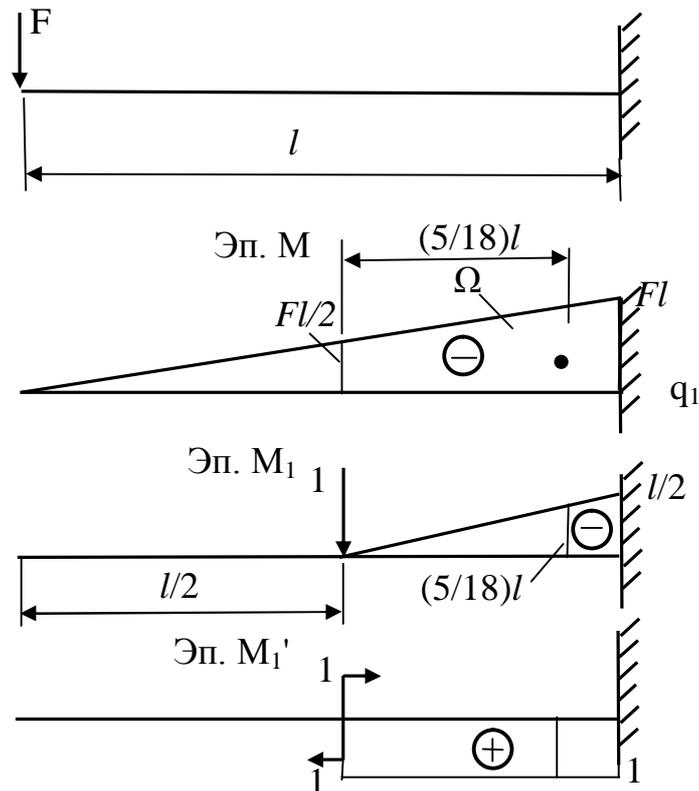


Рис. 39

Решение. Определим площадь трапеции Ω :

$$\Omega = -\frac{1}{2} \left(\frac{Fl}{2} + Fl \right) \frac{l}{2} = -\frac{3}{8} Fl^2.$$

Ординату под центром тяжести площади Ω вычислим по формуле, приведенной в приложении:

$$y_c = -\frac{l/2 + 2l}{l/2 + l} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{5}{18}l.$$

Тогда прогиб в середине длины балки в соответствии с формулой (27) будет

$$v = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ} = -\frac{3}{8}Fl^2 \cdot \left(-\frac{5}{18} \frac{l}{EJ}\right) = \frac{5Fl^3}{48EJ}.$$

Вычислим угол поворота тоже по формуле (27). В этом случае $y_c = 1$.

$$\theta = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ} = -\frac{3Fl^2(+1)}{8EJ} = -\frac{3}{8} \frac{Fl^2}{EJ}.$$

Знак минус указывает, что направления единичного момента и угла поворота не совпадают. Поворот происходит против хода часовой стрелки.

Пример 5. Определить прогиб посередине пролета балки, нагруженной на левом конце моментом M . (рис. 40).

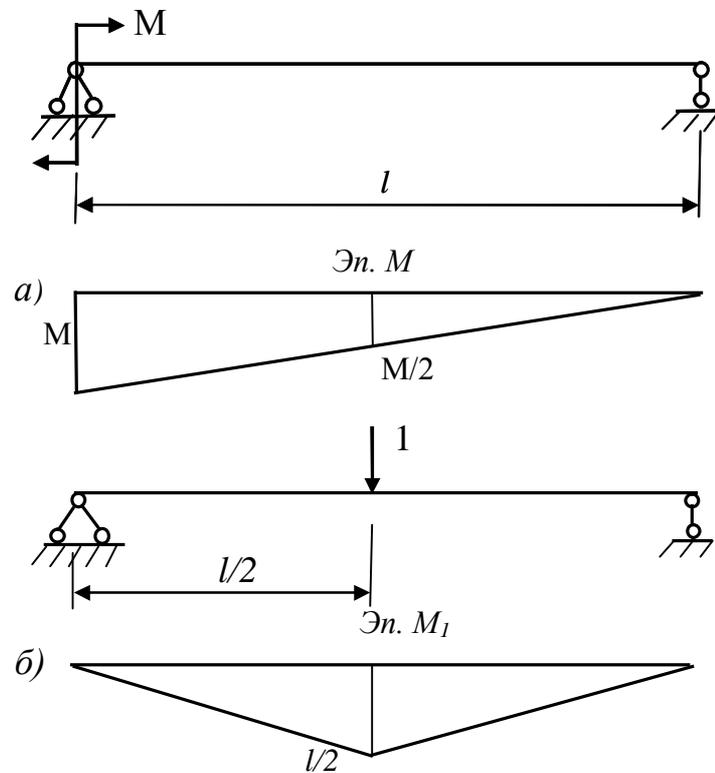


Рис. 40

Решение

На рис. 40 а представлена эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки, а на рис. 40 б – от единичной силы. Воспользуемся формулой (27).

$$v = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ}.$$

Из рис. 40 б получаем $\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} l = \frac{l^2}{8}$. Ординату y_c берем из рис. 40 а:

$$y_c = \frac{M}{2}.$$

Тогда прогиб будет

$$v = \frac{Ml^2}{16EJ}.$$

Пример 6. Определить прогиб и угол поворота в свободном конце балки переменного сечения (рис. 41). Жесткость балки в правой части EJ , в левой – $2EJ$.

Решение. Эпюры изгибающих моментов от заданной и единичных нагрузок представлены на рис. 41. Трапецию на эпюре M разбиваем на прямоугольник и треугольник. Вычислим площади Ω .

$$\Omega_1 = -\frac{Fl^2}{2}, \quad \Omega_2 = -\frac{Fl^2}{2}, \quad \Omega_3 = -\frac{Fl^2}{2}.$$

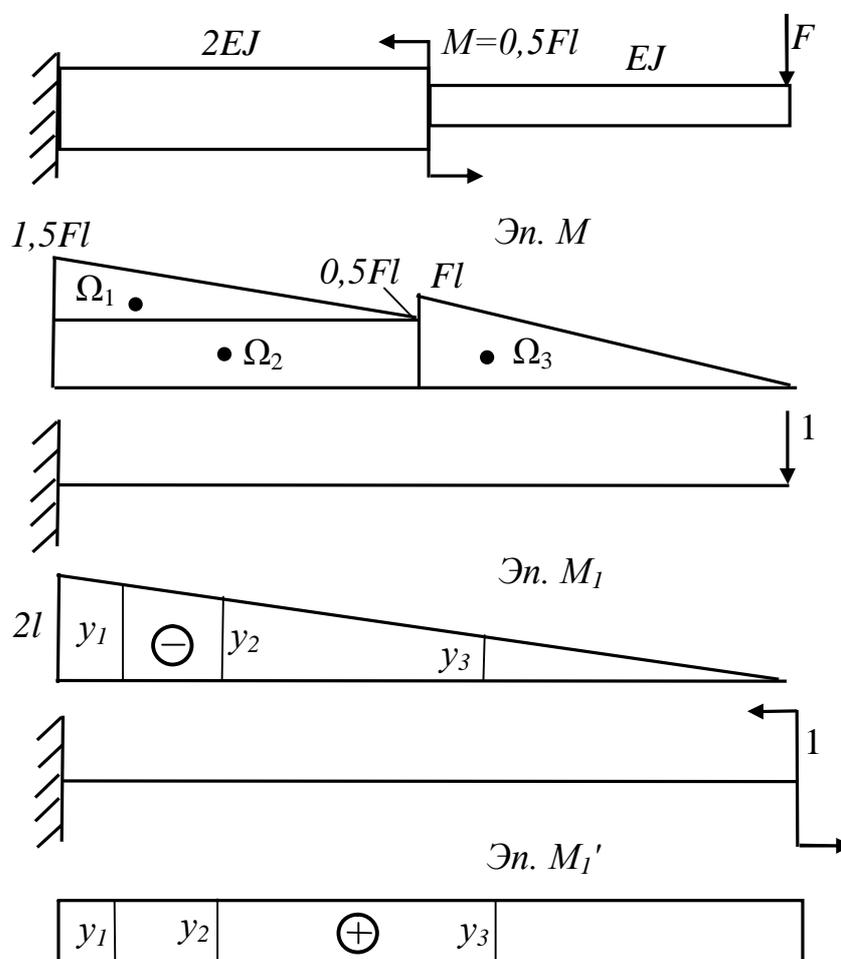


Рис. 41

Ординаты эпюры изгибающих моментов: $y_1 = -\frac{5}{3}l$, $y_2 = -\frac{3}{2}l$, $y_3 = -\frac{2}{3}l$.

Прогиб найдем из выражения

$$v = \frac{\Omega_1 y_1}{2EJ} + \frac{\Omega_2 y_2}{2EJ} + \frac{\Omega_3 y_3}{EJ}.$$

Подставив соответствующие значения, получаем:

$$v = \frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{5}{3} l \cdot \frac{1}{2EJ} + \frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{1}{2EJ} + \frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{27 Fl^3}{24 EJ}.$$

Угол поворота найдем по формуле (27), для чего нам следует грузовую эпюру перемножить с эпюрой от единичного момента. Итак, будем иметь:

$$\theta = \frac{\Omega_1 y_1}{2EJ} + \frac{\Omega_2 y_2}{2EJ} + \frac{\Omega_3 y_3}{EJ}.$$

В этом случае, как видно из рис. 41, $y_1 = y_2 = y_3 = 1$. Подставив значения Ω и y в формулу угла поворота, получаем:

$$\theta = -\frac{Fl^2}{2} \cdot 1 \left(\frac{1}{2EJ} + \frac{1}{2EJ} + \frac{1}{EJ} \right) = -\frac{Fl^2}{EJ}.$$

Пример 7. Расчет статически неопределимой балки.

Для балки, изображенной на рис. 42, требуется: 1) определить опорные реакции; 2) построить эпюры Q и M ; 3) построить эпюру прогибов.

Решение.

I. Начало координат примем в защемлении. От действия нагрузки в балке появляются опорные реакции R_A , R_B , M_A . Для их определения составим уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; R_A + R_B - F + F - ql = 0; \text{ откуда}$$

$$R_A + R_B = ql. \quad (28)$$

$$\sum M_0 = 0; -M_A + ql \frac{l}{2} + F \frac{l}{2} - F \cdot 1,2l - R_B \cdot l = 0;$$

$$M_A + R_B l = \frac{ql^2}{2} - 0,7Fl;$$

$$M_A + R_B l = 0,15 ql^2. \quad (29)$$

Для решения статически неопределимой балки, кроме уравнений равновесия статики следует составить дополнительное уравнение, вытекающее из рассмотрения деформированного состояния балки (рис. 42).

Из рисунка видно, что над шарнирной опорой прогиб балки равен нулю. Поэтому для решения задачи можно требовать условие, чтобы на расстоянии от защемления $x = 0$ прогиб $v = 0$.

На основании уравнения (11) составим дополнительное уравнение для выражения прогиба в точке В и приравняем к нулю.

$$EJv = \frac{-M_A (l+0)^2}{2} + \frac{R_A (l-0)^3}{6} - \frac{F(l-\frac{l}{2})^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} = 0;$$

$$-\frac{M_A l^2}{2} + \frac{R_A l^3}{6} - \frac{0,5ql \cdot l^3}{48} - \frac{ql^4}{24} = 0.$$

Поскольку начало координат расположено в заземлении, в этом уравнении принято $v_0 = v'_0 = 0$. Сократив на $l^2/2$, получим

$$M_A - \frac{R_A l}{3} = -\frac{5}{48} q l^2. \quad (30)$$

Выпишем полученные уравнения (28) – (30) в виде системы

$$R_A + R_B = ql;$$

$$M_A + R_B l = 0,15ql^2;$$

$$M_A - \frac{R_A l}{3} = -\frac{5}{48} ql^2$$

и решим ее: $R_A = ql - R_B;$

$$M_A = 0,15ql^2 - R_B l; \quad M_A - \frac{(ql - R_B)l}{3} = -\frac{5}{48} ql^2;$$

$$0,15ql^2 - R_B l - \frac{ql^2}{3} + \frac{R_B l}{3} = -\frac{5}{48} ql^2; \quad -\frac{2}{3} R_B = 0,079ql; \quad R_B = -0,118ql;$$

$$R_A = ql + 0,118ql; \quad R_A = 1,118ql;$$

$$M_A = -\frac{5}{48} ql^2 + \frac{1,118ql^2}{3}; \quad M_A = 0,269ql^2.$$

2. Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, для чего составим выражения Q и M для всех участков.

Левый участок ($0 \leq x \leq l/2$):

$$Q = R_A - qx; \quad M = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2};$$

при $x = 0$; $Q = R_A = 1,118ql$; $M = -M_A = -0,269ql^2$.

Отложим эти значения на эпюрах (см. рис. 42):

при $x = l/4$; $Q = R_A - \frac{ql}{4} = 1,118ql - 0,25ql = 0,868ql$;

$$M = -0,269ql^2 + 1,118ql \frac{l}{4} - \frac{ql^2}{32} = -0,021ql^2;$$

при $x = l/2$; $Q = 1,118ql - 0,5ql = 0,618ql$;

$$M = -0,269ql^2 + 1,118ql \cdot 0,5l - \frac{ql^2}{8} = -0,269ql^2 + 0,559ql^2 - 0,125ql^2 = 0,165ql^2.$$

Средний участок ($l/2 \leq x \leq l$):

$$Q = R_A - qx - F = 1,118ql - qx - 0,5ql = 0,616ql - qx;$$

$$M = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2} - F(x - \frac{l}{2});$$

при $x = l/2$; $Q = 0,618ql - 0,5ql = 0,118ql$; $M = 0,165ql^2$;

при $x = 0,75l$; $Q = 0,618ql - 0,75ql = -0,132ql$;

$$M = -0,269ql^2 + 1,118ql \cdot 0,75l - \frac{q(0,75l)^2}{2} - 0,5ql(0,75l - 0,5l) = 0,163ql^2;$$

при $x = l$; $Q = 0,618ql - ql = -0,382ql$; $M = 0,999ql^2 = 0,1ql^2$.

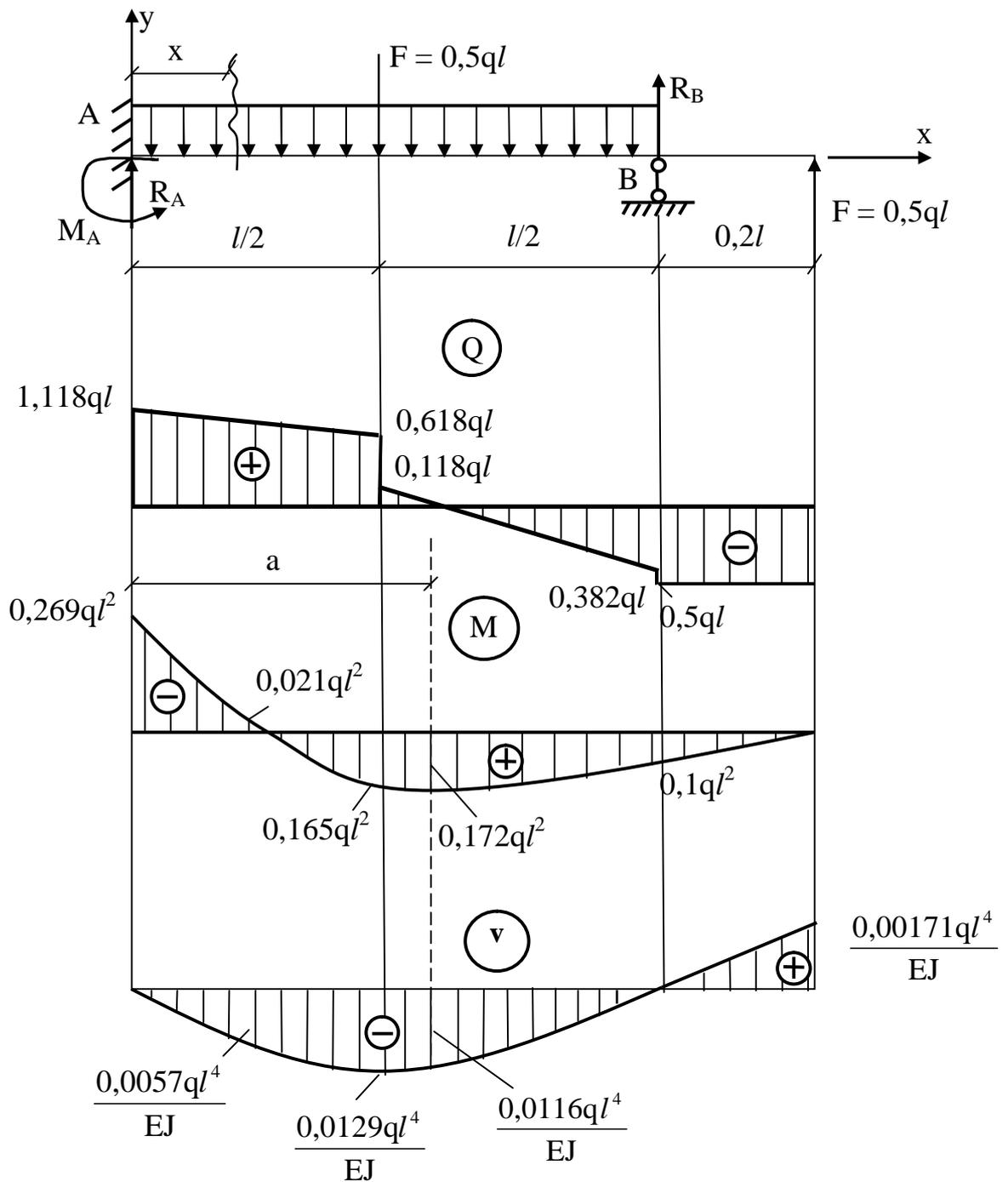


Рис. 42

Правый участок ($l \leq x \leq 1,2l$).

Для этого участка простые выражения для Q и M получим, если рассмотрим правую отсеченную часть балки:

$$Q = -F = -0,5ql; \quad M = F(1,2l - x) = 0,5ql(1,2l - x);$$

$$\text{при } x = l; \quad Q = -0,5ql; \quad M = 0,1ql^2;$$

$$\text{при } x = 1,2l; \quad Q = -0,5ql; \quad M = 0.$$

Найдем расстояние a (см. рис. 42), при котором будем иметь наибольший положительный момент. Для этого выражение для поперечной силы

среднего участка приравняем к нулю, где вместо x подставим a : $Q = 0,618ql - qa = 0$, откуда $a = 0,618l$. Тогда изгибающий момент на расстоянии $x = a$ (на основании выражения для среднего участка) будет

$$M = -M_A + R_A a - \frac{qa^2}{2} - F\left(a - \frac{l}{2}\right) =$$

$$= -0,269ql^2 + 1,118ql(0,618l) - \frac{q(0,618l)^2}{2} - 0,5ql(0,618l - 0,5l) = 0,172ql^2$$

3. Построим эпюру прогибов. Воспользуемся выражением (11). Тогда:

$$\text{при } x = l/4 \quad EJv = \frac{-M_A(l/4-0)^2}{2} + \frac{R_A(l/4-0)^3}{6} - \frac{q(l/4-0)^4}{24};$$

$$EJv = -\frac{0,269ql^2(0,25l)^2}{2} + \frac{1,118ql(0,25l)^3}{6} - \frac{q(0,25l)^4}{24};$$

$$v = \frac{0,00566ql^4}{EJ};$$

$$\text{при } x = l/2 \quad EJv = -\frac{0,269ql^2(0,5l)^2}{2} + \frac{1,118ql(0,5l)^3}{6} - \frac{q(0,5l)^4}{24};$$

$$v = -0,0129ql^4/EJ;$$

при $x = 0,75l$;

$$EJv = -\frac{0,269ql^2(0,75l)^2}{2} + \frac{1,118ql(0,75l)^3}{6} - \frac{q(0,75l)^4}{24} - \frac{F(0,75l-0,5l)^3}{6}.$$

Учитывая, что $F = 0,5ql$, получаем $v = -0,0116ql^4/EJ$;

$$\text{при } x = l \quad EJv = \frac{0,269ql^2 \cdot l^2}{2} + \frac{1,118ql^3}{6} - \frac{q(l)^4}{24} - \frac{F(l-0,5l)^3}{6};$$

$$v = -0,0001ql^4/EJ \approx 0;$$

при $x = 1,2l$

$$EJv =$$

$$= -\frac{M_A(1,2l-0)^2}{2} + \frac{R_A(1,2l-0)^3}{6} - \frac{F(1,2l-0,5l)^3}{6} + \frac{R_B(1,2l-l)^3}{6} - \frac{q(1,2l-0)^4}{24} +$$

$$+ \frac{q(1,2l-l)^4}{24}.$$

При составлении последнего уравнения нагрузка q продолжается до рассматриваемого сечения $x = 1,2l$ (фактически на консоли она отсутствует), поэтому на консоли приложена такая же нагрузка q , но с обратным знаком. Таким образом, появилось последнее слагаемое в уравнении:

$$EJv =$$

$$= \frac{-0,269ql^2(1,2l)^2}{2} + \frac{1,118ql(1,2l)^3}{6} - \frac{0,5ql(0,7)^3}{6} - \frac{0,118ql(0,2l)^3}{6} - \frac{q(1,2l)^4}{24} +$$

$$+ \frac{q(0,2l)^4}{24};$$

$$EJv = 0,00171ql^4; \quad v = \frac{0,00171ql^4}{EJ}.$$

Построенная эпюра прогибов представлена на рис. 42.

Задача №7 Определение перемещений графоаналитическим методом

Решение задачи можно получить графоаналитическим методом, согласно которому значение искомого прогиба v равняется величине изгибающего момента в искомом сечении фиктивной балки, нагруженной фиктивной нагрузкой. В качестве такой нагрузки принимается эпюра изгибающих моментов, построенная для заданной балки и поделенная на её жесткость.

Порядок решения.

1. В заданной балке построить эпюру изгибающих моментов M_p .
2. Выбрать фиктивную балку. Во всех представленных задачах контрольного задания она принимается в виде консольной с защемлением на свободном конце заданной балки.
3. Загрузить фиктивную балку нагрузкой, представляющей собой эпюру изгибающих моментов $M_p / (EJ_i)$.
4. Найти величину изгибающего момента в защемлении M^ϕ . Значение прогиба балки определяется путем деления M^ϕ на выбранную жесткость EJ_i , т.е. $v = M^\phi / (EJ)$.

Пример. Определить прогиб свободного конца балки переменного сечения (рис. 43), если $K = 2$, $M = Fl$, $\beta = 0,5$.

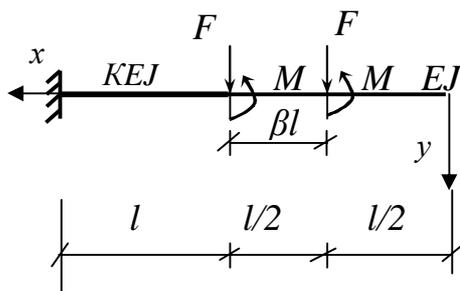


Рис. 43

Решение.

1. Разбиваем балку на участки (см. рис. 44) и выбираем систему координат. Записываем аналитические выражения для изгибающих моментов и поперечных сил. Строим эпюру M_p .

Участок I ($0 \leq x \leq l/2$).

Так как он не нагружен, то $M = Q = 0$.

Участок II ($l/2 \leq x \leq l$):

$$M = Fl - F(x - l/2); \quad Q = F.$$

Участок III ($l \leq x \leq 2l$):

$$M = Fl + Fl - F(x - l/2) - F(x - l); \quad Q = F + F = 2F.$$

2. Выбираем фиктивную балку (см. рис. 44), имеющую жесткость $EJ_2 = KEJ$.

3. Преобразуем эпюру изгибающих моментов путем деления ее ординат на величину жесткости участков балки, принятых в долях EJ_2 (на участке III множитель к эпюре M_p – $1/EJ_2$; на участках II и I – $1/(EJ_1) = 2/(EJ_2)$). Загружаем фиктивную балку этой нагрузкой (рис. 45).

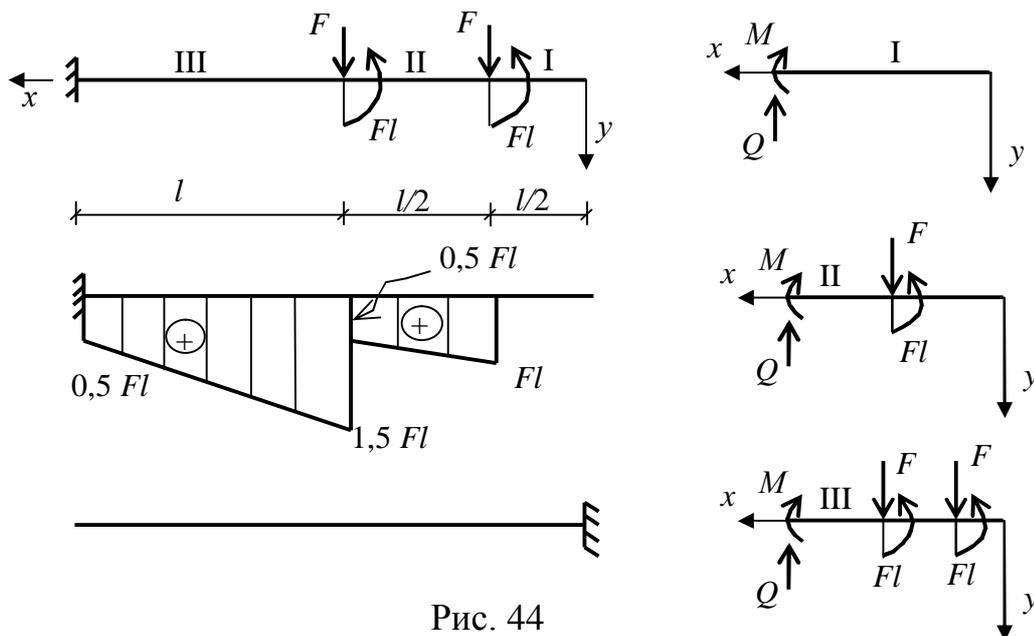


Рис. 44

4. Определяем величину изгибающего момента, возникающего в защемлении фиктивной балки, при этом нагрузку разбиваем на элементарные фигуры (рис. 46).

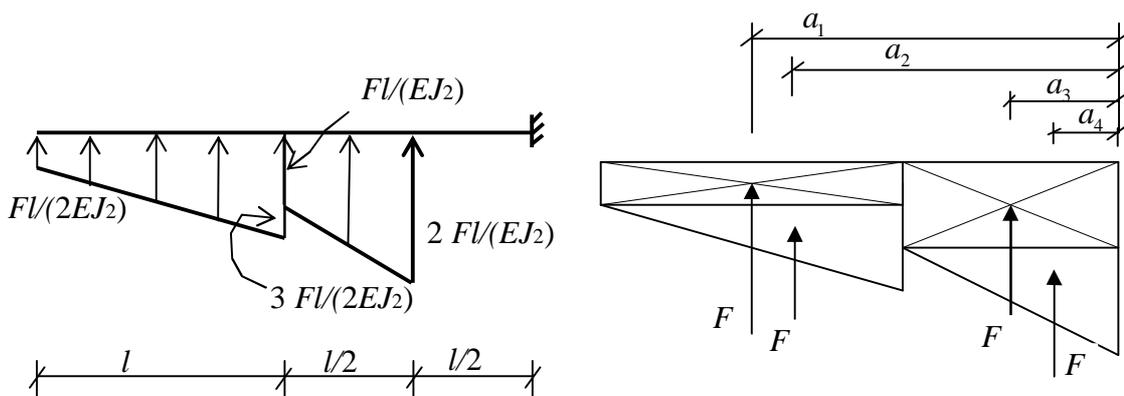


Рис. 45

Рис. 46

Здесь

$$F_1 = \frac{Fl}{2EJ_2} \cdot l = \frac{Fl^2}{2EJ_2}; F_2 = \frac{Fl}{2EJ_2} \cdot l = \frac{Fl^2}{2EJ_2}; F_3 = \frac{Fl}{EJ_2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^2}{2EJ_2};$$

$$F_4 = \frac{Fl}{EJ_2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Fl^2}{4EJ_2}; a_1 = l + \frac{l}{2} = \frac{3l}{2}; a_2 = l + \frac{l}{3} = \frac{4l}{3}; a_3 = \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3l}{4};$$

$$a_4 = \frac{l}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{2l}{3};$$

$$M_3^\phi = v(\kappa) = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + F_4 a_4 = \frac{Fl^2}{2EJ_2} \cdot \frac{3l}{2} + \frac{Fl^2}{2EJ_2} \cdot \frac{4l}{3} + \frac{Fl^2}{2EJ_2} \cdot \frac{3l}{4} + \frac{Fl^2}{4EJ_2} \cdot \frac{2l}{3} =$$

$$= \frac{Fl^3}{EJ_2} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \right) = \frac{47}{24} \cdot \frac{Fl^3}{EJ_2} = v(\kappa).$$

Задача № 8 Внецентренное сжатие

Внецентренно нагруженный стержень одновременно подвержен деформациям растяжения (сжатия) и изгиба. Внутренние усилия, возникающие в любом поперечном сечении, можно свести к осевой продольной силе $N_z = F$ и двум изгибающим моментам M_x и M_y , приложенным в плоскости поперечного сечения (xOy).

На основании принципа независимости действия сил нормальные напряжения складываются из напряжений от продольной силы N_z и напряжений, порожденных изгибающими моментами M_x и M_y , т.е

$$\sigma = \pm \sigma_N \pm \sigma_{M_x} \pm \sigma_{M_y} = \pm \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x, \quad (31)$$

где первое слагаемое является константой для заданного нагружения и описывает напряжения, равномерно распределенные по площади поперечного сечения стержня. Законы распределения напряжений, возникающих от изгибающих моментов, представляют собой линейную зависимость.

При решении задачи желательно соблюдать следующую последовательность:

1. Для заданного поперечного сечения произвольным образом провести координатные оси и вычислить координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i},$$

где A_i – площадь элементарной фигуры (см. прил. 2); x_i, y_i – координаты центра тяжести элементарной фигуры. Провести центральные оси.

2. Найти моменты инерции сечения относительно центральных осей x_c и y_c по формулам

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 A_i); \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + \epsilon_i^2 A_i).$$

Здесь a_i и ϵ_i – параметры, представляющие собой расстояние между собственными осями x, y и центральными осями x_c и y_c соответственно; J_x и J_y – моменты инерции элементарных фигур относительно осей, проходящих через их центр тяжести (см. прил. 2).

3. По формуле (31) в наиболее удаленных точках поперечного сечения заданного стержня найти напряжения, из которых выбрать наибольшее растягивающие и наибольшие сжимающие.

4. Вычислить допускаемую нагрузку на сжатие и растяжение, окончательно приняв к расчету минимальную из них.

Пример. Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 47, сжимается продольной силой F , приложенной в точке E .

Требуется: 1) вычислить наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через F и размеры сечения; 2) найти допускаемую нагрузку $[F]$ при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях: для чугуна на сжатие $[\sigma_c] = 100$ МПа и на растяжение $[\sigma_p] = 20$ МПа. Размеры: $a = 6$ см; $b = 3$ см.

Решение.

1. Проводим оси x и y (см. рис. 47) и вычисляем координаты центра тяжести x_c и y_c . Для этого поперечное сечение представляем в виде прямоугольников I и II со сторонами: 1) $2a \cdot 4b$; 2) $a \cdot 2b$ и находим:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2} = \frac{2a \cdot 4b \cdot a - a \cdot 2b \cdot \frac{3}{2}a}{2a \cdot 4b - a \cdot 2b} = \frac{8a^2 b - 3a^2 b}{6ab} = \frac{5a}{6} = 5 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2} = \frac{2a \cdot 4b \cdot 2b - a \cdot 2b \cdot 2b}{2a \cdot 4b - a \cdot 2b} = \frac{16b^2 a - 4b^2 a}{6ab} = 2b = 6 \text{ см}.$$

Проводим оси x_c и y_c .

Вычисляем моменты инерции сечения J_{x_c} и J_{y_c} относительно осей x_c и y_c . Для этого разобьем поперечное сечение на прямоугольники I, II, III (см. рис. 47):

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 A_i) = [J_{x_1} + a_1^2 A_1] + [J_{x_2} + a_2^2 A_2] + [J_{x_3} + a_3^2 A_3];$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 A_i) = [J_{y_1} + b_1^2 A_1] + [J_{y_2} + b_2^2 A_2] + [J_{y_3} + b_3^2 A_3].$$

$$\text{Здесь } J_{x_1} = J_{x_3} = \frac{ab^3}{12}; J_{x_2} = \frac{a(4b)^3}{12} = \frac{16ab^3}{3}; J_{y_1} = J_{y_3} = \frac{ba^3}{12}; J_{y_2} = \frac{4ba^3}{12} = \frac{ba^3}{3};$$

$$a_1 = b + \frac{b}{2} = \frac{3}{2}b; a_2 = 0; a_3 = -a_1 = -\frac{3}{2}b; b_1 = b_3 = 2a - \frac{a}{2} - x_c = 2a - \frac{a}{2} - \frac{5a}{6} = \frac{2a}{3};$$

$$b_2 = x_c - \frac{a}{2} = \frac{5a}{6} - \frac{a}{2} = \frac{a}{3}.$$

Находим моменты инерции:

$$J_{x_c} = \frac{ab^3}{12} + \left(\frac{3}{2}b\right)^2 ab + \frac{16ab^3}{3} + \frac{ab^3}{12} + \left(-\frac{3}{2}b\right)^2 ab = ab^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{9}{4} + \frac{16}{3} + \frac{1}{12} + \frac{9}{4}\right) = 10ab^3;$$

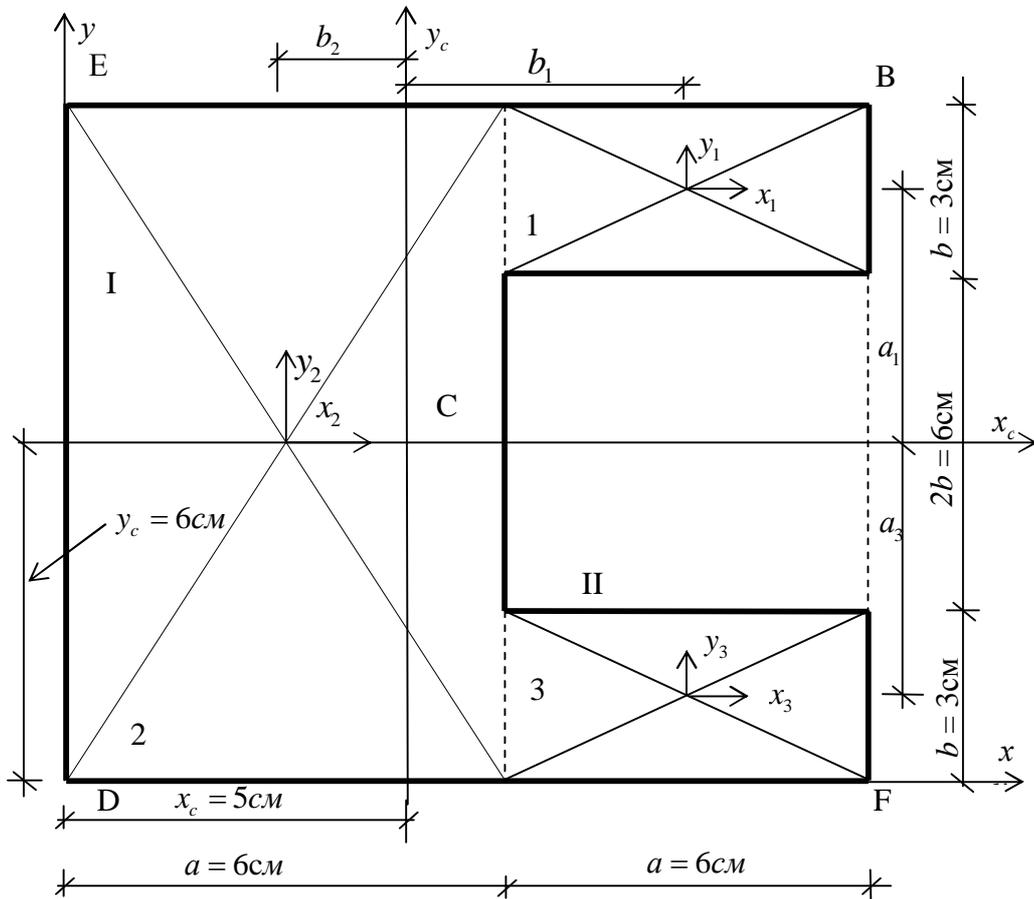


Рис. 47

$$\begin{aligned}
 J_{y_c} &= \frac{va^3}{12} + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 av + \frac{4va^3}{12} + \left(\frac{a}{3}\right)^2 a \cdot 4v + \frac{va^3}{12} + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 av = \\
 &= va^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{4}{9} + \frac{4}{12} + \frac{4}{9} + \frac{1}{12} + \frac{4}{9}\right) = \frac{11}{6} va^3.
 \end{aligned}$$

Определим напряжения в отдельных точках поперечного сечения по формуле:

$$\sigma_i = -\frac{F}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_i - \frac{M_y}{J_y} x_i.$$

$$\text{Здесь } A = 6av; J_x = 10av^3; J_y = \frac{11}{6} va^3;$$

$$M_x = F \cdot y_E = 2vF; M_y = F \cdot x_E = -F \frac{5}{6} a;$$

$$x_E = -\frac{5}{6} a; y_E = 2v; x_B = \frac{7}{6} a; y_B = 2v;$$

$$x_D = -\frac{5}{6} a; y_D = -2v; x_F = \frac{7}{6} a; y_F = -2v.$$

Вычисляем напряжения:

$$\sigma_E = \frac{-F}{6av} - \frac{2Fv}{10av^3} \cdot 2v - \frac{(-F \cdot \frac{5}{6}a) \cdot (-\frac{5}{6}a)}{\frac{11}{6}va^3} = -\frac{F}{av} \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{10} + \frac{25}{66} \right) = -0,0525F;$$

$$\sigma_B = \frac{-F}{6av} - \frac{2Fv \cdot 2v}{10av^3} - \frac{(-F \cdot \frac{5}{6}a) \cdot (\frac{7}{6}a)}{\frac{11}{6}va^3} = -\frac{F}{av} \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{10} - \frac{35}{66} \right) = -0,0364F;$$

$$\sigma_F = \frac{-F}{6av} - \frac{2Fv \cdot (-2v)}{10av^3} - \frac{(-F \cdot \frac{5}{6}a) \cdot (\frac{7}{6}a)}{\frac{11}{6}va^3} = -\frac{F}{av} \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{10} - \frac{35}{66} \right) = -0,0424F;$$

$$\sigma_D = \frac{-F}{6av} - \frac{2Fv}{10av^3} \cdot (-2v) - \frac{(-F \cdot \frac{5}{6}a) \cdot (-\frac{5}{6}a)}{\frac{11}{6}va^3} = -\frac{F}{av} \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{10} + \frac{25}{66} \right) = -0,008F.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в точке E $\sigma_E^c = -0,0525F$, а максимальные растягивающие напряжения в точке F $\sigma_F^p = 0,0424F$.

Находим допускаемую нагрузку на сжатие:

$$\sigma^c = -0,0525F_c \leq [\sigma_c] = 100 \text{ МПа}; \quad F_c = \frac{100}{0,0525} = 1904,8 \text{ кН}.$$

Определяем допускаемую нагрузку на растяжение:

$$\sigma^p = 0,0424F_p \leq [\sigma_p] = 20 \text{ МПа}; \quad F_p = \frac{20}{0,0424} = 471,7 \text{ кН}.$$

Принимаем $[F] = 471,7 \text{ кН}$.

Задача № 9 Расчет ломанного бруса

Согласно четвертой теории прочности максимальный расчетный момент определяется по формуле:

$$M_p = \sqrt{M_{из}^2 + 0,75M_{кр}^2}, \quad (32)$$

где $M_{из}$ – изгибающий и $M_{кр}$ – крутящий момент.

Величины $M_{из}, M_{кр}$, входящие в (32), как правило, имеют экстремальные значения в различных сечениях ломаного стержня. Для нахождения максимального расчетного момента приходится рассматривать несколько комбинаций из $M_{из}$ и $M_{кр}$.

Последовательность решения

1. В зависимости от конфигурации заданного ломаного стержня нанести все характерные сечения и пронумеровать последние в определенном

порядке: прямолинейный незагруженный участок стержня выделяется двумя торцевыми сечениями; участок, загруженный равномерно распределенной нагрузкой – тремя сечениями: два по торцам и одно сечение должно проходить через центр участка.

2. Последовательно рассечь балку в каждом из характерных сечений и составить уравнения статического равновесия, из которых определить величины $M_{из}$ и $M_{кр}$.
3. По найденным значениям построить эпюры изгибающих и крутящих моментов, при этом значения изгибающих моментов необходимо откладывать со стороны растянутого волокна, а положительные значения крутящего момента – вверх от горизонтальной оси стержня. Крутящий момент, действующий в сечении, следует принимать положительным, если при взгляде со стороны сечения внешний момент направлен против хода часовой стрелки.
4. Путем подбора установить опасное сечение и найти для него величину расчетного момента по четвертой теории прочности.

Пример. Ось ломаного стержня (рис. 48) круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости и имеющая прямые углы в точках А, В и С, загружена некоторой вертикальной нагрузкой. Требуется: 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих моментов ($\alpha = 1,0$); 2) установить опасное сечение и найти для него величину расчетного момента по четвертой теории прочности.

Решение.

1. Наносим характерные сечения (рис. 49).

2. Определяем величины изгибающих и крутящих моментов для каждого из сечений:

– изгибающие моменты:

$$M_1 = 0; M_2 = \frac{1}{2} q \cdot \left(\frac{\alpha l}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{8}; M_3 = q \cdot \frac{(\alpha l)^2}{2} = \frac{ql^2}{2};$$

$$M_4 = 0; M_5 = q \alpha l \cdot l = ql^2; M_6 = q(\alpha l) \cdot \frac{(\alpha l)}{2} = \frac{ql^2}{2};$$

$$M_7 = q(\alpha l) \cdot \left(l + \frac{\alpha l}{2}\right) = \frac{3}{2} ql^2; M_8 = 0; M_9 = ql \cdot l = ql^2;$$

$$M_{10} = ql \cdot l + q(\alpha l) \cdot l = 2ql^2; M_{11} = ql \cdot 2l + q(\alpha l) \cdot 2l = 4ql^2;$$

– крутящие моменты:

$$M_1^{кр} = 0; M_2^{кр} = 0; M_3^{кр} = 0; M_4^{кр} = q(\alpha l) \frac{(\alpha l)}{2} = \frac{ql^2}{2}; M_5^{кр} = M_4^{кр} = \frac{ql^2}{2};$$

$$M_6^{кр} = -q(\alpha l)l = -ql^2; M_7^{кр} = M_6^{кр} = -ql^2; M_8^{кр} = 0; M_9^{кр} = 0;$$

$$M_{10}^{кр} = q(\alpha l) \left(\frac{\alpha l}{2} + l\right) = \frac{3}{2} ql^2; M_{11}^{кр} = M_{10}^{кр} = \frac{3}{2} ql^2.$$

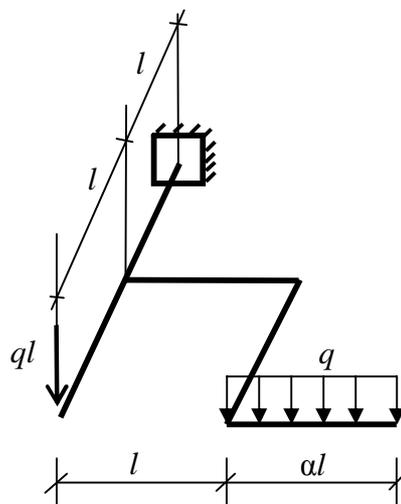


Рис. 48

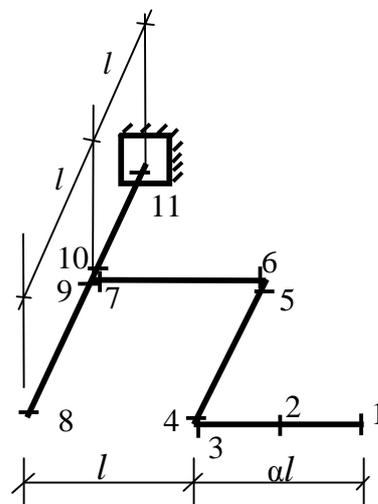


Рис. 49

3. Строим эпюры изгибающих (рис. 50) моментов и крутящих (рис. 51) моментов.
4. Устанавливаем наиболее опасное сечение и убеждаемся из анализа эпюр $M_{из}$ и $M_{кр}$, что самыми загруженными являются волокна ломаного бруса в 11-м сечении. Отсюда находим величину расчетного момента по формуле (32):

$$M_p = \sqrt{M_{из}^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{(4ql^2)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2}ql^2\right)^2} = ql^2 \sqrt{16 + \frac{27}{16}} = \frac{ql^2}{4} \sqrt{283} = 4,206ql^2.$$

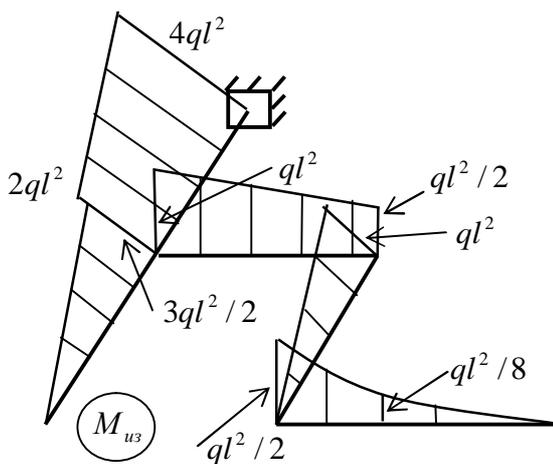


Рис. 50

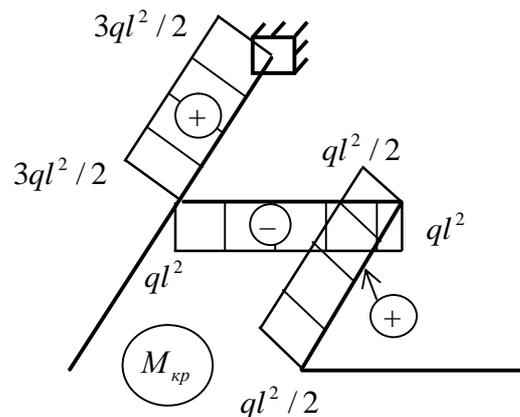


Рис. 51

Задача № 10 Расчет криволинейного стержня

Первоначально силу F необходимо разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие (рис. 52) и определить опорные реакции. Выде-

лечь характерные участки и для каждого из них, задаваясь произвольным сечением, которое определяется полярными координатами r и φ , написать выражения для определения внутренних усилий M, Q и N .

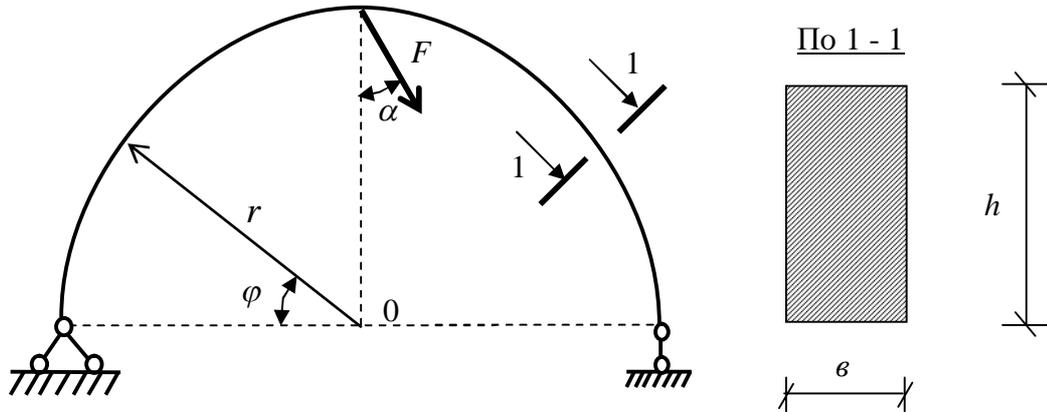


Рис. 52

В брусках большой кривизны нормальные напряжения вычисляются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y_{\min}^{\max}}{S \cdot \rho_{\min}^{\max}}, \quad (33)$$

где y – текущая координата высоты сечения h ; $y^{\max} = \frac{h}{2} + y_0$; $y^{\min} = \frac{h}{2} - y_0$;

$\rho_{\min}^{\max} = r_0 + y_{\min}^{\max}$; $S = Ay_0$; $y_0 = r - r_0$; r_0 – радиус кривизны нейтрального слоя; r – радиус кривизны стержня.

Радиусы кривизны нейтрального слоя для прямоугольного, треугольного и круглого сечений определяются соответственно по следующим формулам:

$$r_0^{\text{прям}} = \frac{h}{\ln(R_1 / R_2)}; \quad (34)$$

$$r_0^{\text{треуг}} = \frac{bh}{2R_1 \frac{b}{h} \ln(R_1 / R_2) - 2b}; \quad (35)$$

$$r_0^{\text{круг}} = \frac{d^2}{4(2r - \sqrt{4r^2 - d^2})}; \quad (36)$$

где R_1 – радиус кривизны наружных волокон; R_2 – радиус кривизны внутренних волокон; b – ширина сечения; h – высота сечения; d – диаметр сечения.

Последовательность решения.

1. Разложить силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие.

2. Провести оси декартовой системы координат, определить опорные реакции и выполнить проверку.
3. Разделить балку (криволинейный брус) на участки и для каждого из них записать выражения для нахождения M , Q и N .
4. Задаться значениями φ с интервалом в 30° и вычислить усилия M , Q и N .
5. По найденным значениям M , Q и N построить эпюры внутренних усилий.
6. Найти радиус кривизны нейтрального слоя по одной из формул (34) – (36).
7. Вычислить величины: A ; $y_0 = r - r_0$; $S = Ay_0$; $\rho^{\frac{\max}{\min}} = r_0 - y^{\frac{\max}{\min}}$.
8. По формуле (10.1) определить величину нормальных напряжений для наиболее опасного сечения, где действуют максимальный изгибающий момент и максимальная продольная сила. Если наиболее опасное сечение выявить не удастся, то оно определяется методом подбора.

Пример. Построить эпюры M , Q и N и найти величины нормальных напряжений в опасном сечении кривого стержня (см. рис. 53), если $\alpha = 45^\circ$; $F = 20\sqrt{2}$ кН; $r = 0,3$ м; $h = 0,1$ м; $e = 0,05$ м.

Решение.

1. Разложим силу F на вертикальную и горизонтальную составляющие (рис. 53):

$$F_B = F \cdot \cos 45^\circ = 20\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \text{ кН}; F_T = F \cdot \sin 45^\circ = 20\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \text{ кН}.$$

2. Проведем оси координат x , y и определим опорные реакции:

$$\sum X = 0; \quad -X_A + 20 = 0; \quad X_A = 20 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0; \quad 20 \cdot r + 20 \cdot r - R_B \cdot 2r = 0; \quad R_B = 20 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -20 \cdot r + 20 \cdot r + Y_A \cdot 2r = 0; \quad Y_A = 0 \text{ кН}$$

Проверка.

$$\sum Y = 0; \quad Y_A + R_B - 20 = 0; \quad 0 + 20 - 20 = 0.$$

3. Выделяем участки I и II (см. рис. 53). Для i -го сечения на участке I – $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ (рис. 54) запишем выражения для M, Q, N : $M_i = Y_A x_i + X_A \cdot y_i$. Из чертежа (см. рис. 54) следует

$$x_i = r - OL = r - r \cdot \cos \varphi = r \cdot (1 - \cos \varphi); \quad y_i = Li = r \cdot \sin \varphi.$$

$$\text{Окончательно } M_i = Y_A \cdot r(1 - \cos \varphi) + X_A \cdot r \cdot \sin \varphi.$$

$$Q_i = Y_A \cdot \sin \varphi + X_A \cdot \cos \varphi;$$

$$N_i = -Y_A \cdot \cos \varphi + X_A \sin \varphi.$$

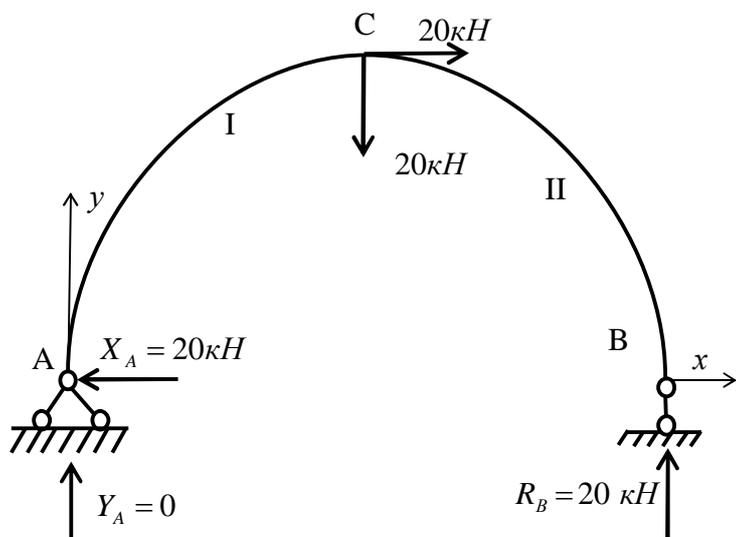


Рис. 53

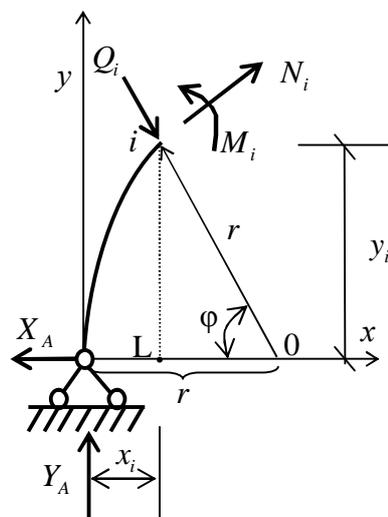


Рис. 54

Для j -го сечения участка II ($90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$) (рис. 55) имеем:

$$M_j = Y_A x_j - P_B \cdot (x_j - r) + X_A \cdot y_j + P_r (r - y_j),$$

где $y_j = r \sin(180^\circ - \varphi) = r \sin \varphi$; $x_j = r + r \cos(180^\circ - \varphi) = r(1 - \cos \varphi)$;

$$Q_j = (Y_A - F_B) \sin \varphi + (X_A - F_r) \cos \varphi, N_j = (P_B - Y_A) \cos \varphi + (X_A - F_r) \sin \varphi.$$

4. Задаемся углом φ с шагом в 30° и весь последующий расчет сведем в табл. 9.1.

Таблица 9.1

№ уч.	φ	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$r \sin \varphi$	$r(1 - \cos \varphi)$	M_K (кН·м)	Q (кН)	N (кН)
I	0°	0,00	1,00	0,00	0,00	0	20	0
	30°	0,50	0,866	0,1500	0,0402	3,000	17,32	10
	60°	0,866	0,50	0,2598	0,1500	5,196	10	17,32
	90°	1,00	0,00	0,3000	0,3000	6,000	0	20
II	90°	1,00	0,00	0,3000	0,3000	6,000	-20	0
	120°	0,866	-0,50	0,2598	0,4500	3,000	-17,32	-10
	150°	0,50	-0,866	0,1500	0,5598	0,804	-10	-17,32
	180°	0,00	-1,00	0,00	0,6000	0	0	-20

5. Определим величину нормальных напряжений в опасном сечении.

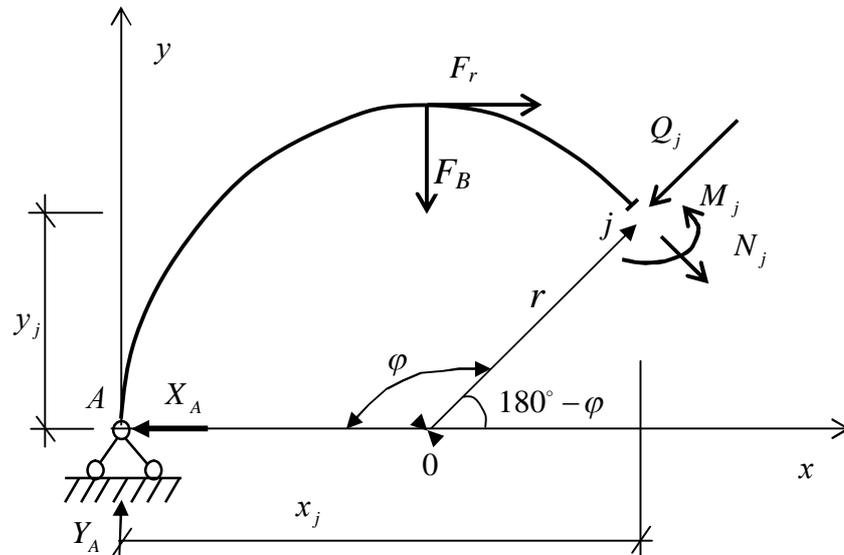


Рис. 55

6. Находим радиус кривизны нормального слоя по формуле (34):

$$r_0 = \frac{h}{\ln(R_1/R_2)} = \frac{h}{\ln \frac{r+h/2}{r-h/2}} = \frac{0,1}{\ln 1,4} = 0,2972 \text{ м.}$$

7. Вычисляем величины A , S , y_0 , $\rho_{\frac{\max}{\min}}$.

$$A = \epsilon h = 0,05 \cdot 0,1 = 0,005 \text{ м}^2; \quad y_0 = r - r_0 = 0,3 - 0,2972 = 0,0028 \text{ м};$$

$$S = A \cdot y_0 = 0,0028 \cdot 0,005 = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3; \quad y_{\max} = 0,05 + 0,0028 = 0,0528 \text{ м};$$

$$y_{\min} = 0,05 - 0,0028 = 0,0472 \text{ м}; \quad \rho_{\max} = 0,35 \text{ м}; \quad \rho_{\min} = 0,25 \text{ м.}$$

8. Наиболее напряженное сечение (рис. 56) – сечение с углом $\varphi = 90^\circ$. Для него определяем нормальные напряжения:

$$\sigma_{\min}^{\text{верх}} = \frac{N}{A} - \frac{My_{\min}}{S\rho_{\min}} = \frac{20}{0,005} - \frac{6 \cdot 0,0528}{1,4 \cdot 10^{-5} \cdot 0,35} = 4 \cdot 10^3 - 6,465 \cdot 10^4 = -6,035 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{низ}} = \frac{N}{A} + \frac{My_{\min}}{S\rho_{\min}} = \frac{20}{0,005} + \frac{6 \cdot 0,0472}{1,4 \cdot 10^{-5} \cdot 0,25} = 4 \cdot 10^3 + 8,091 \cdot 10^4 = 8,491 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Определяем напряжения в данном сечении без учета кривизны:

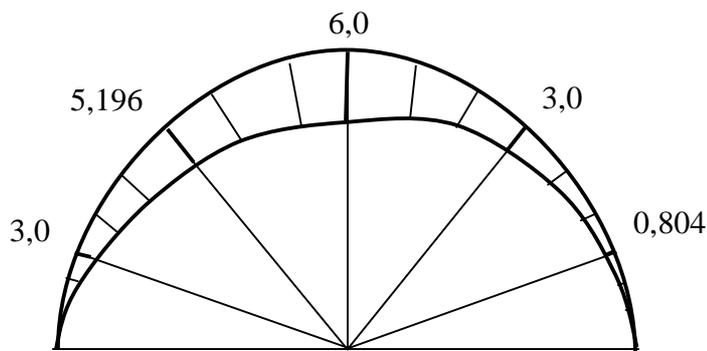
$$W = \frac{6h^2}{12} = \frac{0,05 \cdot 0,1^2}{12} = \frac{5}{12} \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{20}{0,005} \pm \frac{6}{\frac{5}{12} \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^3 \pm 14,4 \cdot 10^4;$$

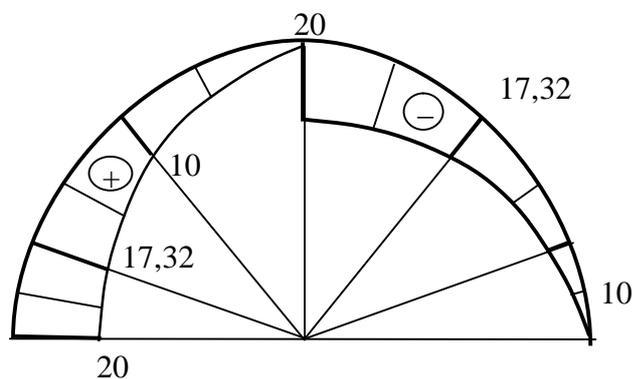
$$\sigma_{\max} = 14,8 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; \quad \sigma_{\min} = 14 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Подбор сечения без учета кривизны стержня может повлечь за собой значительные недонапряжения, которые в нашем случае составят:

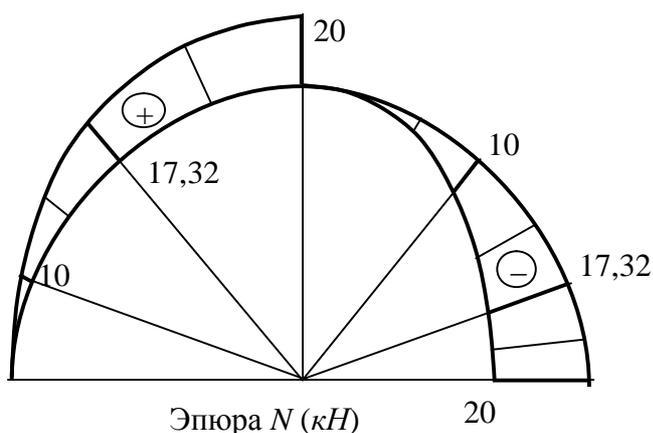
$$\frac{\sigma_{\min} - \sigma_{\min}^{\text{верх}}}{\sigma_{\min}} \cdot 100\% = \frac{-14 \cdot 10^4 + 6,065 \cdot 10^4}{-14 \cdot 10^4} \cdot 100\% = 56,7\%.$$



Эпюра M ($\kappa H \cdot m$)



Эпюра Q (κH)



Эпюра N (κH)

Рис. 56

Задача № 11 Расчет стержня на устойчивость

Напряжения, возникающие в стержне при действии на него центрально-приложенной силы, определяются по хорошо известному уравнению

$$\sigma = F / A. \quad (37)$$

Найденные согласно (37) напряжения не должны превышать некоторой величины допускаемых напряжений, которая в задачах устойчивости зависит не только от вида материала, но и от формы поперечного сечения, длины, условий закрепления торцевых сечений стержня. Учет этих факторов осуществляется введением коэффициента к основным допускаемым напряжениям $[\sigma]$ для конкретного материала, т.е.

$$\sigma = F / A \leq [\sigma] \cdot \varphi. \quad (38)$$

Сомножитель φ , получивший название коэффициента продольного изгиба, показывает степень уменьшения $[\sigma]$ при сжатии с учетом опасности возникновения продольного изгиба.

Коэффициент φ тесно связан с гибкостью стержня λ . Эта взаимозависимость, как правило, представляется в табличной форме (см. прил. 2).

Гибкость стержня вычисляется по формуле:

$$\lambda = \frac{l \cdot \mu}{i_{\min}}, \quad (39)$$

где l – длина стержня; μ – коэффициент, характеризующий способ закрепления концов стержня (см. рис. 57); $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$ – минимальный радиус инерции; J_{\min} – минимальный момент инерции; A – площадь поперечного сечения стержня.

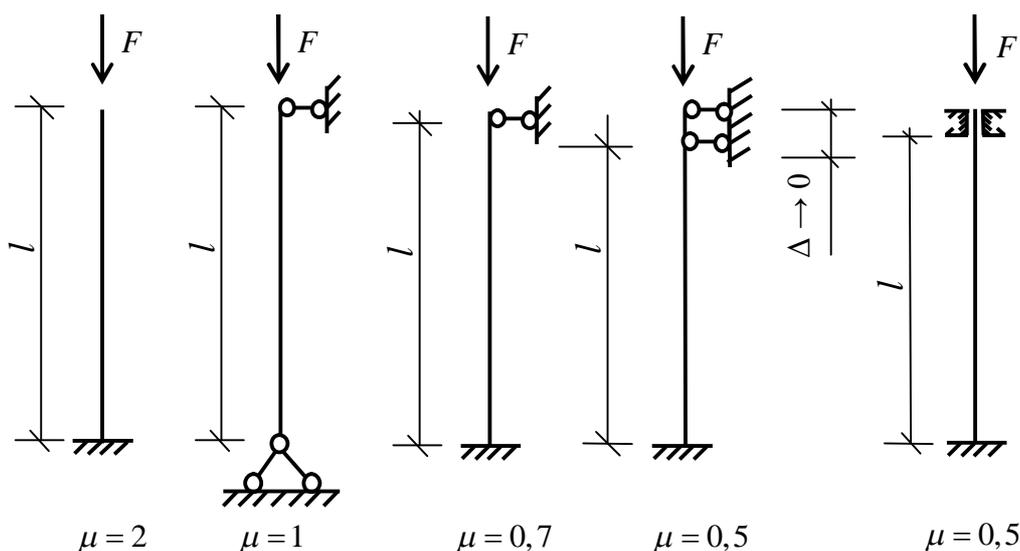


Рис. 57

Последовательность решения

1. Положить в первом приближении начальное значение параметра φ и определить необходимую площадь поперечного сечения из формулы (38), т.е $A = F / ([\sigma] \cdot \varphi)$.

2. В соответствие, с заданным соотношением подобрать площадь поперечного сечения и вычислить параметр гибкости λ .

3. По таблицам прил. 3 выбрать коэффициент продольного изгиба φ_n , соответствующий линейному значению гибкости λ .

4. Сравнить полученный коэффициент с первоначально принятым φ и при их расхождении более чем в 1 % повторить расчет при новом значении $\varphi_1 = (\varphi + \varphi_n)/2$.

5. Определить величину критической силы по формуле:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A, \quad (40)$$

где критические напряжения определяются по эмпирической формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - v\lambda + c\lambda^2, \quad (41)$$

если гибкость стержни лежит в пределах от 61 до 100.

Для стали марки Ст.3 эмпирические коэффициенты, входящие в (41), имеют следующие значения: $a = 31 \text{ кН/см}^2$; $v = 0,114 \text{ кН/см}^2$; $c = 0$. Если параметр λ превышает предельное значение, т.е. 100, то в этом случае величину критической силы находим по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / (\mu l)^2. \quad (42)$$

6. Вычислить коэффициент запаса устойчивости как отношение критического значения напряжений к напряжениям, действующим в стержне, т.е.

$$n_y = \sigma_k / \sigma. \quad (43)$$

Пример. Стальной стержень длиной 2 м сжимаете силой $F = 500 \text{ кН}$ (рис. 58).

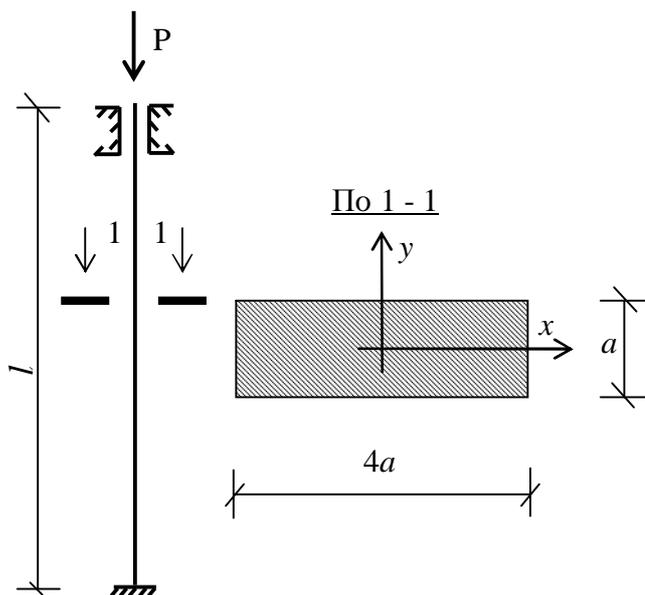


Рис. 58

Требуется:

1) найти размеры поперечного сечения при допустимом напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2 = 160 \text{ МПа}$ (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись величиной, коэффициента $\varphi = 0,6$);

2) найти величину критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Решение.

1. Полагаем $\varphi = 0,6$ и находим величину требуемой площади:

$$A = \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi} = \frac{500}{0,6 \cdot 16} = 52,08 \text{ см}^2.$$

2. Определяем размеры поперечного сечения $A=4a^2 = 5208 \text{ см}^2$, откуда $a = 3,61 \text{ см}$. Вычисляем величину минимального момента инерции $J_{\min} = \frac{4aa^3}{12}$ и гибкости стержня ($\mu = 0,5 \text{ см}$; см. рис. 57).

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}} = \frac{0,5 \cdot 200}{\sqrt{\frac{4a^4}{12 \cdot 4a^2}}} = \frac{100\sqrt{12}}{a} = \frac{346,41}{3,61} = 95,96.$$

3. По табл. прил. 3 путем интерполирования находим $\varphi_H = 0,646$.

4. Так как расхождение между φ_H и φ составляет $(0,646 - 0,60) \cdot 100 / 0,60 = 7,7\%$, задаемся новым значением коэффициента продольного изгиба.

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_H + \varphi}{2} = \frac{0,6 + 0,646}{2} = 0,623$$

и повторяем расчет с п. 1:

$$A_1 = \frac{F}{[\sigma] \cdot \varphi_1} = \frac{500}{0,623 \cdot 16} = 50,16 \text{ см}^2;$$

$a = 3,54 \text{ см}$; $\lambda = 97,86$; по табл. прил. 2 $\varphi_2 = 0,619$.

Сравниваем найденный коэффициент с исходным

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_2} \cdot 100\% = \frac{0,623 - 0,619}{0,619} \cdot 100\% = 0,6\%.$$

Принимаем коэффициент продольного изгиба

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0,623 + 0,619}{2} = 0,621,$$

которому соответствуют:

– параметр жесткости $\lambda = 97,67$;

– площадь поперечного сечения $A = 500 / (0,621 \cdot 16) = 50,32 \text{ см}^2$;

$a = 3,55 \text{ см}$;

– напряжения, действующие в стержне

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{500}{50,32} = 9,936 \text{ кН/см}^2 = 99,36 \text{ МПа}$$

5. Находим величину критического напряжения по формуле (41)

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 31 - 0,114 \cdot 97,67 + 0 = 19,866 \text{ кН/см}^2 = 198,66 \text{ МПа}.$$

Вычисляем значение критической силы:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 19,866 \cdot 50,32 = 999,66 \text{ кН}.$$

6. Определяем коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \sigma_{кр} / \sigma = \frac{19866}{99,36} \approx 2.$$

Задача № 12

Расчет шарнирно опертой балки на удар

Действие любой динамической нагрузки, в том числе и ударной, вызывает в элементах конструкций инерционные силы, которые усугубляют работу сооружения. Деформации и усилия, возникающие от динамической нагрузки, превышают деформации и усилия от статического нагружения падающего тела на некоторую величину μ , получившую название коэффициента динамичности, т.е.

$$\delta_{дин} = \mu \delta_{ст}; M_{дин} = \mu M_{ст}; Q_{дин} = \mu Q_{ст}; \delta_{дин} = \mu \delta_{ст}. \quad (44)$$

Поэтому расчет на ударную нагрузку сводится к известному расчету конструкции на статическое нагружение весом падающего тела, приложенного в месте (точке) падения, и нахождению коэффициента динамичности по формуле

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta}, \quad (45)$$

где h – высота, с которой падает груз Q ; $\Delta = \delta_{ст}$ – величина прогиба в месте приложения груза для балки на жестких опорах (рис. 59).

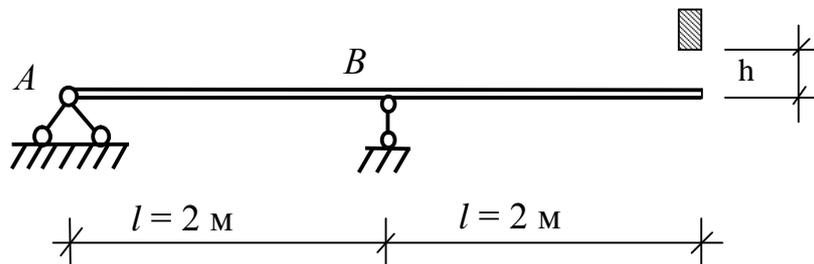


Рис. 59

Для балки с правой опорой, замененной на пружину, величина прогиба в месте приложения груза $\Delta = \delta_{ст} - \beta \cdot \Delta_{пр}$, где β – коэффициент, устанавливающий зависимость между осадкой пружины и перемещением точки приложения груза Q . Он находится из подобия треугольников, полученных при повороте всей балки вокруг центра шарнира левой опоры. При этом тело балки считается недеформируемым, а перемещение точки приложения груза Q принимается равным единице; $\Delta_{пр} = R_{пр} \alpha$ – осадка правой опоры от действия веса статического груза Q ; $R_{пр}$ – реакция в правой опоре, возникающая от статического нагружения балки грузом Q ; α – податливость пружины.

Последовательность решения.

1. Для заданного номера двутавра из таблиц сортамента (ГОСТ 8239-89) выбрать величины момента сопротивления W_x и момента инерции J_x .
2. К балке приложить груз Q в месте его падения и определить опорные реакции.

3. Выбрать начало координат на лево неподвижной опоре, разбить балку на участки и записать аналитические выражения для изгибающих моментов на каждом из них.
4. Построить эпюру изгибающих моментов от действия статически приложенного груза Q .
5. Записать уравнения метода непосредственного интегрирования для прогибов балки на каждом участке. Постоянные интегрирования найти из условий равенства нулю прогибов на опорах балки.
6. Определить величину прогиба балки в месте приложения груза.
7. По формуле (45) вычислить величину коэффициента динамичности.
8. Найти максимальный изгибающий момент, возникающий в балке при падении груза по формуле (44), т.е. $M_{дин}^{max} = \mu M_{ст}^{max}$;
9. Определить наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{max} = M_{дин}^{max} / W_x$.

Пример. На двутавровую балку (см. рис. 59), свободно лежащую на двух жестких опорах, с высоты h падает груз Q .

Требуется:

- 1) найти наибольшие нормальные напряжения в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой равна α ;
- 3) сравнить величины максимальных нормальных напряжений, полученных в соответствии с п. 1 и 2, в процентном соотношении.

Дано:

$$h = 0,01\text{ м}, \text{ I №10}, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}, Q = 400\text{ Н}, \alpha = 0,03\text{ м/кН}, l = 2,00\text{ м}.$$

Решение.

1. Из таблицы сортамента ГОСТ 8239-89 выбираем значения

$$J_x = 198 \text{ см}^4 = 198 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; W_x = 39,7 \text{ см}^3 = 39,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

2. Определяем опорные реакции (рис. 60):

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 2 + Q \cdot 4 = 0; R_B = 800\text{ Н}.$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 2 + Q \cdot 2 = 0; R_A = 400\text{ Н}.$$

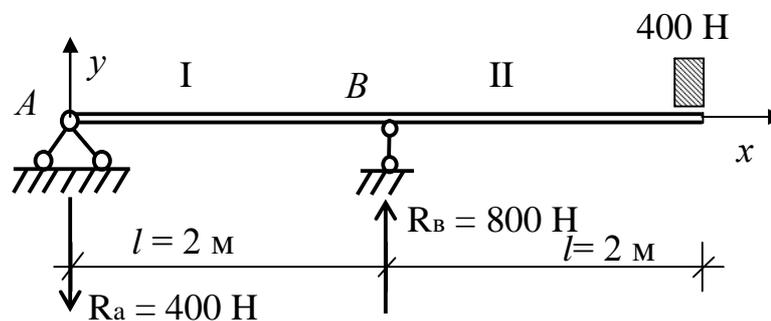


Рис. 60

Проверка:

$$\sum y = 0; -400 + 800 - 400 = 0.$$

3. Разбиваем балку на два участка и для каждого записываем выражение изгибающих моментов $M_1 = -R_A \cdot x$; $M_{11} = -R_A \cdot x + R_B \cdot (x-2)$.

4. Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 61)

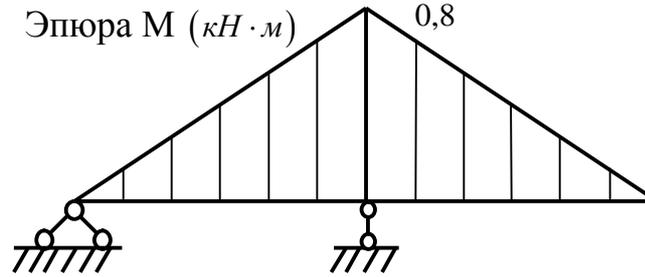


Рис. 61

5. Записываем выражение для определения прогибов на каждом участке в принятой системе координат (рис. 60):

$$v_1 = -\frac{R_A}{EJ} \cdot \frac{x^3}{6} + D_1 x + C_1; v_{11} = -\frac{R_A}{EJ} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{R_B}{EJ} \cdot \frac{(x-2)^3}{6} + D_2 x + C_2.$$

Из условия сопряжения (рис. 62):

$$v_1 = v_{11} \text{ при } x = l = 2 \text{ м следует: } D_1 = D_2 = D; C_1 = C_2 = C.$$

Определяем величины постоянных интегрирования D и C по условиям опирания:

$$\text{при } x=0; v_1=0; C=0;$$

$$\text{при } x=l; v_{11}=0; D = \frac{2}{3} \cdot \frac{R_A}{EJ}.$$

6. Вычисляем величину прогиба на конце консоли:

$$\begin{aligned} v_{11}^{cm} (\text{при } x=4) &= -\frac{R_A}{EJ} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{R_B}{EJ} \cdot \frac{(x-2)^3}{6} + \frac{2R_A}{EJ} \cdot \frac{x}{3} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{400 \cdot 64}{6} + \frac{800 \cdot 8}{6} + \frac{2 \cdot 400 \cdot 4}{3} \right) = \\ &= \frac{400 \cdot (-64 + 16 + 16)}{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8} \cdot 6} \approx -0,00539 \text{ м} = -0,539 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \end{aligned}$$

Знак (-) говорит о том, что перемещение v_{11}^{cm} не совпадает с положительным направлением оси y . Принимаем $v_{11}^{cm} = 0,539 \cdot 10^{-2}$ м.

7. Находим коэффициент динамичности:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot h / v_{11}^{cm}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 0.01 / (0,539 \cdot 10^{-2})} = 1 + \sqrt{1 + 3,71} \approx 3,17.$$

8. Вычисляем максимальный изгибающий момент

$$M_{\max}^{\text{дин}} = \mu \cdot M_{\max}^{\text{ст}} = 3,17 \cdot 800 \approx 2536 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

9. Находим наибольшие нормальные напряжения.

$$\sigma_{y\partial} = M_{\max}^{\text{дин}} / W_x = 2536 / (39,7 \cdot 10^{-6}) = 6,39 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

10. Определяем наибольшие нормальные напряжения при условии, что правая опора заменена пружиной. В этом случае последовательность

расчета сохраняется, однако величину перемещения, входящую в формулу (45) для вычисления коэффициента динамичности, найдем с учетом податливости опоры:

Коэффициент $\beta = 0,5$ (см. рис. 62);

$$\Delta_{np} = R_B \cdot \alpha = 0,8 \cdot 0,03 = 0,024 \text{ м};$$

$$\Delta = v_{11} + \Delta_{np} \beta = 0,0053 + 0,24 \cdot \frac{1}{2} = 0,0173$$

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 0,01 / 0,0173} = 1 + \sqrt{1 + 1,156} \approx 2,468$$

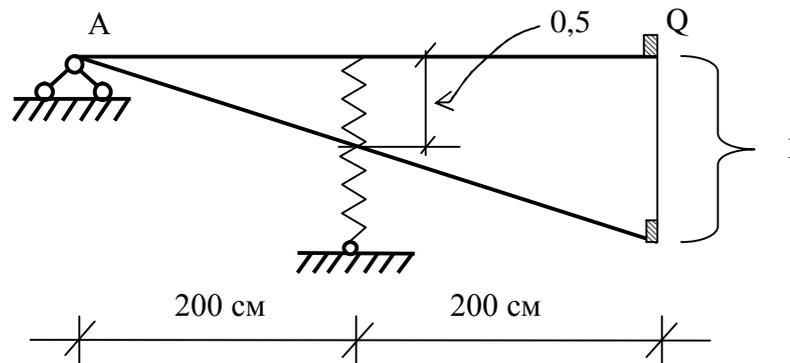


Рис. 62

Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max}^{\text{дин}} = \mu \cdot M_{\max}^{\text{ст}} = 2,468 \cdot 800 \approx 1974 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Максимальное нормальное напряжение

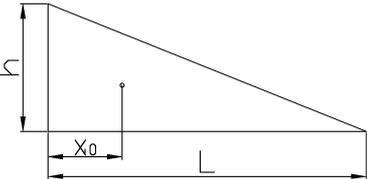
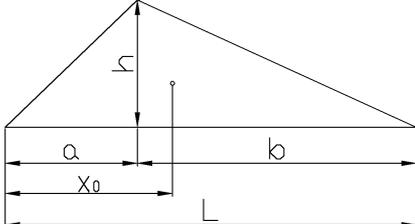
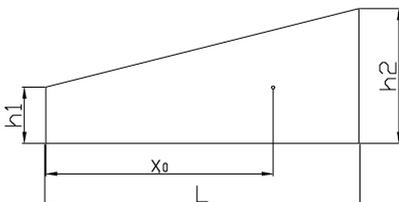
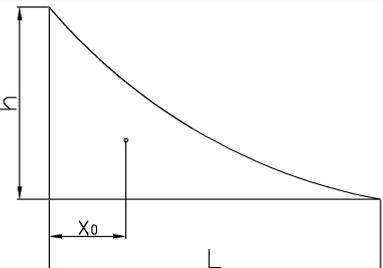
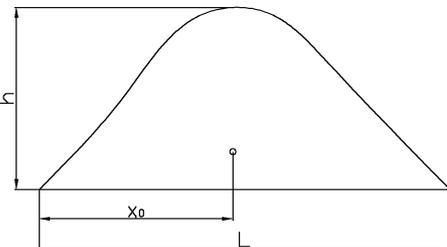
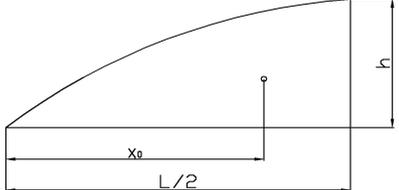
$$\sigma_{\max, \alpha} = M_{\max}^{\text{дин}} / W_x = \frac{1974}{39,7 \cdot 10^{-6}} \approx 4,97 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

В случае замены жесткой опоры пружиной податливостью α напряжения уменьшатся на 22,2 %:

$$\Delta \sigma = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\max, \alpha}}{\sigma_{\max}} \cdot 100\% = \frac{6,39 \cdot 10^7 - 4,97 \cdot 10^7}{6,39 \cdot 10^7} \cdot 100\% \approx 22,2\% .$$

Приложения

Приложение 1

Вид эпюры	Площадь эпюры Ω	Расстояние до центра тяжести x_0
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{a+l}{3}$
	$\frac{1}{2}(h_1 + h_2)l$	$\frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2} \frac{l}{3}$
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}h \frac{l}{2} = \frac{hl}{3}$	$\frac{5}{8}l$

Геометрические характеристики при растяжении - сжатии и изгибе

№ п/п	Эскиз	A	J_x	J_y	Примечание
1		a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$J_{y'} = \frac{a^4}{3}$
2		ab	$\frac{ab^3}{12}$	$\frac{ba^3}{12}$	$J_{x'} = \frac{ab^3}{3}$
3		$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{36}$	$J_{x'} = \frac{bh^3}{12}$
4		$\frac{\pi d^2}{8}$ $c=0,2122$	$\frac{\pi d^4}{128}$	$\frac{\pi d^4}{128}$	$J_{x'} = 0,00686 d^4$

Значения коэффициента φ в зависимости
от гибкости λ для сталей марки Ст.0, Ст.2, Ст.3, Ст.4

Гибкость λ	φ
0	1,0
10	0,99
20	0,97
30	0,95
40	0,92
50	0,89
60	0,86
70	0,81
80	0,85
90	0,69
100	0,60
110	0,52
120	0,45
130	0,40
140	0,36
150	0,32
160	0,29
170	0,26
180	0,23
190	0,21
200	0,19

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Метод. указания и контрольные задания для студентов-заочников инж. - строит. спец. высш. учеб. заведений / Б.Н. Кутуков, М.М. Кац. 3-е изд. М.: Высш.шк., 1990. 80 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1975. 624 с.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов; Под ред. В.И. Качурина. М.: Высш. шк., 1972. 348 с.
4. Черкасов В. Д. Сопротивление материалов: учеб. для вузов/ В. Д. Черкасов, А. С. Тюряхин, В. В. Ерастов. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та. 2011. – 425 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания и порядок выполнения контрольных работ.....	3
Контрольные работы.....	4
Примеры выполнения контрольных работ.....	25
Задача 1. Расчет статически неопределимых систем.....	25
Задача №2. Расчет стержня переменного сечения.....	28
Задача №3. Расчет стержня на кручение.....	31
Задача №4. Определение геометрических характеристик.....	34
Задача №5. Расчет балок на прочность.....	37
Задача 6. Определение перемещений в балках.....	48
Задача №7. Определение перемещений графоаналитическим методом.....	68
Задача № 8. Внецентренное сжатие.....	70
Задача № 9. Расчет ломанного бруса.....	73
Задача № 10. Расчет криволинейного стержня.....	75
Задача № 11. Расчет стержня на устойчивость.....	80
Задача № 12. Расчет шарнирно опертой балки на удар.....	84
Приложения.....	88

Учебное издание

**Дураев Александр Ефимович
Ерастов Валентин Викторович
Емельянов Алексей Иванович**

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ
МАТЕРИАЛОВ И ПРИМЕРЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

Печатается в авторской редакции в соответствии с представленным
оригинал-макетом